DIAGRAMMI DI BODE

Teoria e applicazioni

Diagrammi di Bode: introduzione

- I diagrammi di Bode sono due:
  - Diagrammi delle ampiezze
  - Diagrammi delle fasi

- I diagrammi di Bode sono detti asintotici poiché rappresentano le caratteristiche della f.d.t per $\omega \to 0$ $\omega \to \infty$

- Ciascuno di essi è riportato su scala semilogaritmica nel seguente modo:
  - Le pulsazioni vengono riportate sull'asse delle ascisse in scala logaritmica base 10
  - La fase e le ampiezze sono riportate sull'asse delle ordinate di ciascun grafico e in scala lineare

Procedimento

Si vuole tracciare il diagramma di Bode della seguente f.d.t.

$$G(j\omega) = K \frac{(s+1/\tau_1^{'})(s+1/\tau_2^{'})\ldots(s^2+2\delta_1^{'}\omega_{n1}^{'}+\omega_{n1}^{'2})(s^2+2\delta_1\omega_{n2}^{'}+\omega_{n2}^{'2})\ldots}{s^h(s+1/\tau_1)(s+1/\tau_2)\ldots(s^2+2\delta_1\omega_{n1}+\omega_{n1}^2)(s^2+2\delta_1\omega_{n2}+\omega_{n2}^2)\ldots}$$

1. Bisogna prima fattorizzare la funzione di trasferimento, trasformarla cioè nella seguente forma:

$$G(j\omega) = K^{'} \frac{(1+\tau_1^{'}s)(1+\tau_2^{'}s)\ldots(1+\frac{2\delta_1^{'}s}{\omega_{n1}^{'}}+\frac{s^2}{\omega_{n1}^{'2}})(1+\frac{2\delta_1^{'}s}{\omega_{n2}^{'}}+\frac{s^2}{\omega_{n2}^{'2}})\ldots}{s^h(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\ldots(1+\frac{2\delta_1 s}{\omega_{n1}}+\frac{s^2}{\omega_{n1}^2})(1+\frac{2\delta_1 s}{\omega_{n2}}+\frac{s^2}{\omega_{n2}^2})\ldots}$$

dove

Procedimento

$$\Rightarrow \quad K' = K \frac{\tau_1 \tau_2 \ldots \omega'_{n1} \omega'_{n2} \ldots}{\tau'_1 \tau'_2 \ldots \omega'_{n1} \omega'_{n2} \ldots}$$

K è detta costante di guadagno

Per h=0 s=0, K′è detta guadagno statico

Per h=1 s=0, K′è detta costante di velocità

Per h=2 s=0, K′è detta costante di accelerazione

Procedimento

2. Si esprime la funzione di trasferimento fattorizzata, in decibel

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|G(j\omega)\right| =$$

$$= 20\log_{10}\left| K^{'} \frac{(1+\tau_1^{'}s)(1+\tau_2^{'}s)\ldots(1+\frac{2\delta_1^{'}s}{\omega_{n1}^{'}}+\frac{s^2}{\omega_{n1}^{'2}})(1+\frac{2\delta_1^{'}s}{\omega_{n2}^{'}}+\frac{s^2}{\omega_{n2}^{'2}})\ldots}{s^h(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\ldots(1+\frac{2\delta_1 s}{\omega_{n1}}+\frac{s^2}{\omega_{n1}^2})(1+\frac{2\delta_1 s}{\omega_{n2}}+\frac{s^2}{\omega_{n2}^2})\ldots} \right|$$

Procedimento

3. Ricordando le proprietà dei logaritmi:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^b) = b * \log(a)$$

$$\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

$$a = b^{\log_b(a)}$$

Procedimento

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20(\log_{10}\left|K^{'}\right| + \log_{10}\left|1+\tau_1^{'}s\right| + \log_{10}\left|1+\tau_2^{'}s\right| +$$

$$+\log_{10}\left|1+\frac{2\delta_1^{'}s}{\omega_{n1}^{'}}+\frac{s^2}{\omega_{n1}^{'2}}\right| + \log_{10}\left|1+\frac{2\delta_2^{'}s}{\omega_{n2}^{'}}+\frac{s^2}{\omega_{n2}^{'2}}\right| +$$

$$-\log_{10}\left|1+\tau_1 s\right| - \log_{10}\left|1+\tau_2 s\right| - h\bullet\log_{10}\left|s\right| +$$

$$-\log_{10}\left|1+\frac{2\delta_1 s}{\omega_{n1}^{'}}+\frac{s^2}{\omega_{n1}^{'2}}\right| - \log_{10}\left|1+\frac{2\delta_2 s}{\omega_{n2}^{'}}+\frac{s^2}{\omega_{n2}^{'2}}\right|)$$

Procedimento

4. Ricordando la definizione di modulo di una quantità complessa

$$|x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Il modulo in decibel diventa:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20(\log_{10}|K'| + \log_{10}\sqrt{1+(\tau_1'\omega)^2} + \log_{10}\sqrt{1+(\tau_2'\omega)^2} +$$

$$+\log_{10}\left|1+\frac{2\delta_1' s}{\omega'_{n1}}+\frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right| + \log_{10}\left|1+\frac{2\delta_2' s}{\omega'_{n2}}+\frac{s^2}{\omega'^2_{n2}}\right| +$$

$$-\log_{10}\sqrt{1+(\tau_1\omega)^2} + \log_{10}\sqrt{1+(\tau_2\omega)^2} - h\bullet\log_{10}|\omega| +$$

$$-\log_{10}\left|1+\frac{2\delta_1 s}{\omega_{n1}}+\frac{s^2}{\omega^2_{n1}}\right| - \log_{10}\left|1+\frac{2\delta_2 s}{\omega_{n2}}+\frac{s^2}{\omega^2_{n2}}\right|)$$

Procedimento

- Per il diagramma delle fasi, lo sfasamento sarà dato dalla somma di tutti gli sfasamenti

$$\varphi = arctg(\frac{imm}{re}) \rightarrow$$

$$\varphi = arct(\frac{0}{k^{'}}) + arctg(\frac{\omega\tau_1^{'}}{1}) + arctg(\frac{\omega\tau_2^{'}}{1}) +$$

$$+arctg\left(-n\frac{\omega}{0}\right) + arctg(-\frac{\omega\tau_1^{'}}{1}) + arctg(-\frac{\omega\tau_2}{1})$$

Procedimento

5. Si noti che possiamo scomporre la f.d.t espressa in dB, nelle seguenti parti:

$$+20 \bullet \log_{10} \left| K' \right|$$

$$+20 \bullet \log_{10} \sqrt{1+(\tau_1'\omega)^2}$$

$$+20 \bullet \log_{10} \sqrt{1+(\tau_2'\omega)^2}$$

$$+20 \bullet \log_{10} \left| 1+\frac{2\delta_1' s}{\omega_{n1}'}+\frac{s^2}{\omega_{n1}'^2} \right|$$

$$+20 \bullet \log_{10} \left| 1+\frac{2\delta_2' s}{\omega_{n2}'}+\frac{s^2}{\omega_{n2}'^2} \right|$$

$$-20 \bullet \log_{10} \sqrt{1+(\tau_1\omega)^2}$$

$$-20 \bullet \log_{10} \sqrt{1+(\tau_2\omega)^2}$$

$$-20 \bullet h \bullet \log_{10} \left| \omega \right|$$

$$-20 \bullet \log_{10} \left| 1+\frac{2\delta_1 s}{\omega_{n1}}+\frac{s^2}{\omega_{n1}^2} \right|$$

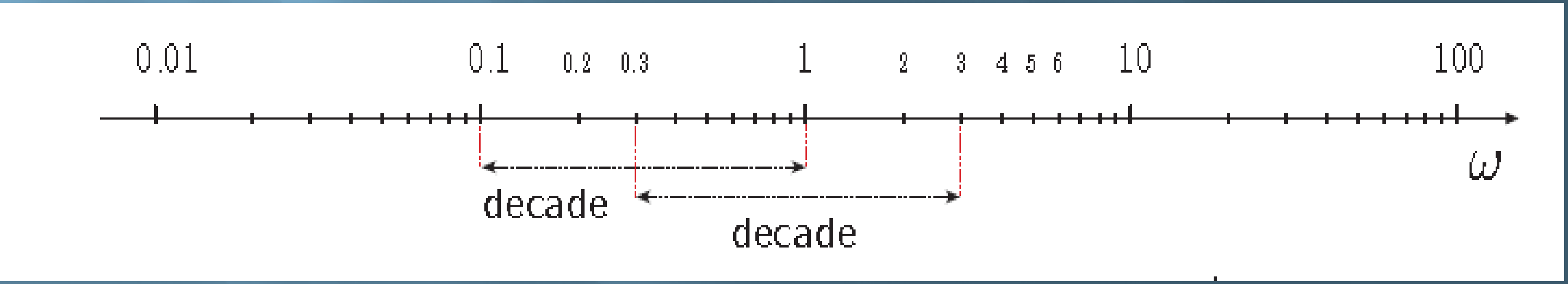
$$-20 \bullet \log_{10} \left| 1+\frac{2\delta_2 s}{\omega_{n2}}+\frac{s^2}{\omega_{n2}^2} \right|$$

Ciò ci permette di scomporre il suo grafico in altri grafici più semplici

Procedimento

Ricordiamo la definizione di decade

Siamo in scala logaritmica e, gli unico intervalli uguali sono quelli che vanno da una decade all’altra, cioè di 10 in 10 . Esempio, l’intervallo 0.5-5 , 50-500.
In figura è riportato un esempio



Procedimento

6. Si eseguono delle approssimazioni visto che stiamo parlando di diagrammi asintotici.

$$\omega \to 0$$

$$\omega \to \infty$$

Analizziamo il grafico di ogni singolo termine per poi procedere alla sovrapposizione di tutti

Singoli grafici: funzione costante

$$G(s) = K$$

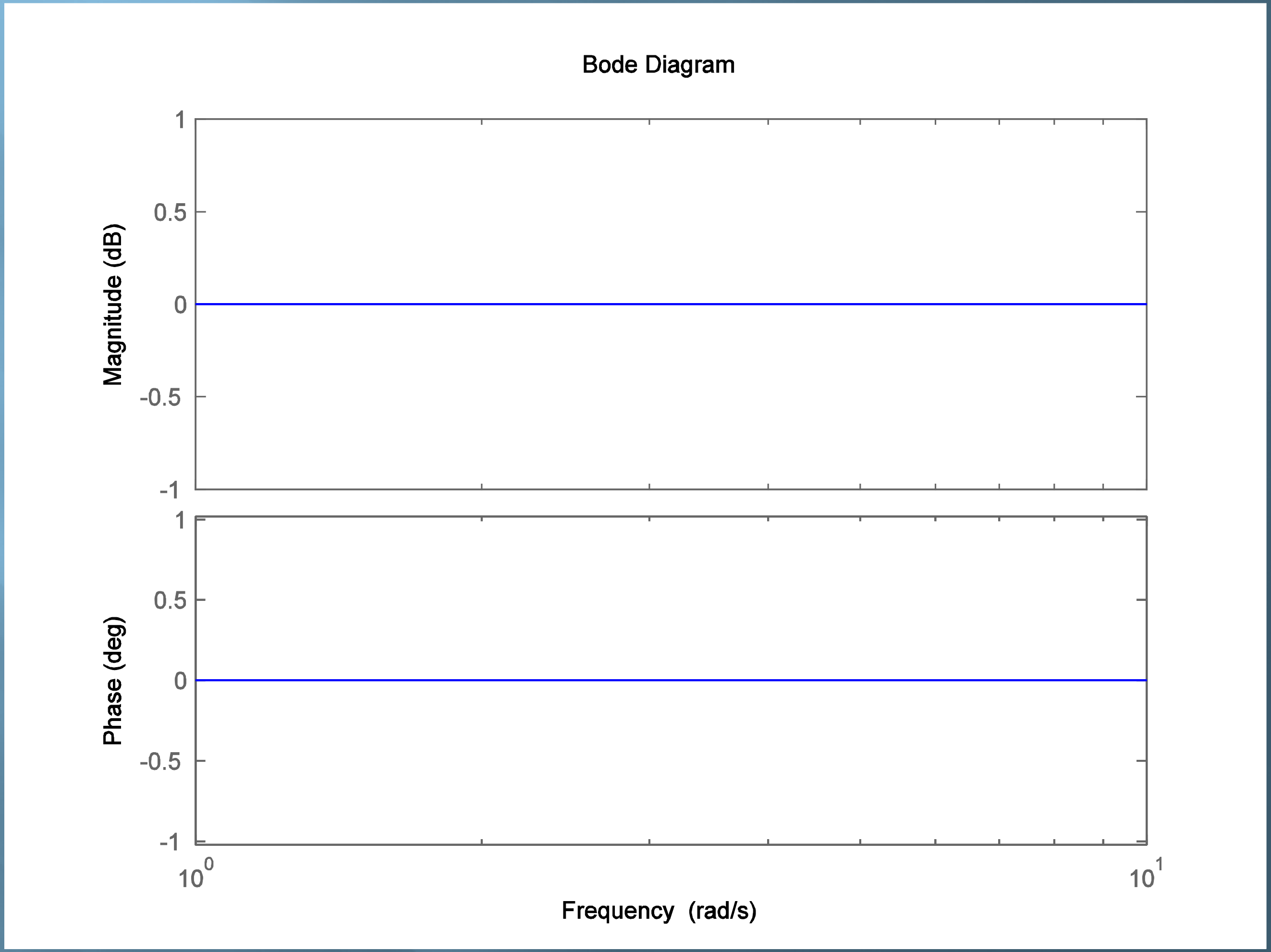
Retta parallela all'asse x con sfasamento $\varphi = arctg\left(\frac{0}{K^{'}}\right) = 0$

Modulo $\left|G(s)\right| = 20 \bullet \log_{10} K$

Es: G(s)= 1

|G(s)|=20

Singoli grafici: funzione costante



Singoli grafici: funzione costante

- $G(s)=10$

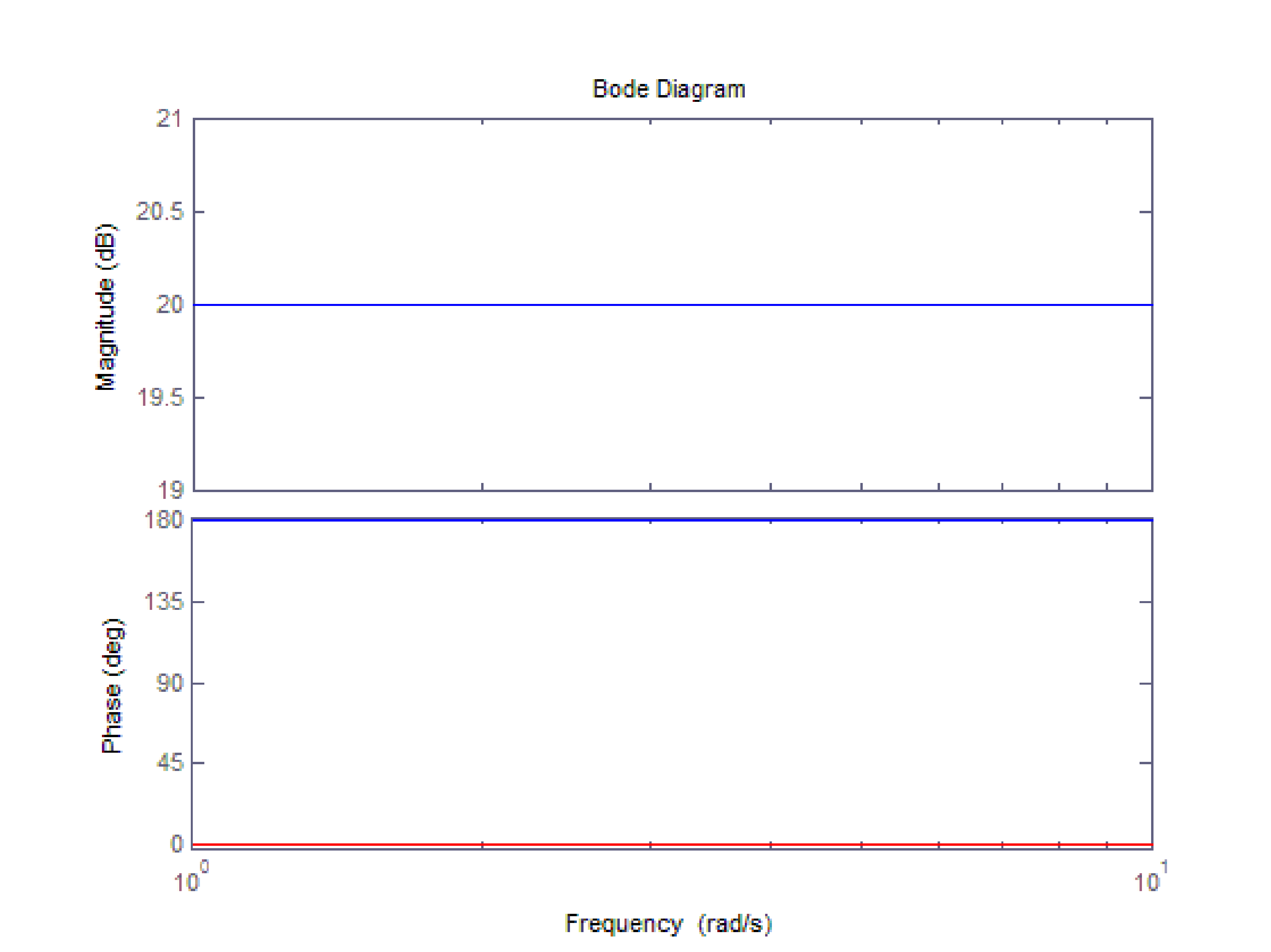
$|G(s)|=20$

$\phi=0°$

- $G(s)=-10$

$|G(s)|=20$

$\phi=180°$


Bode Diagram
21
20.5
20
19.5
19
Magnitude (dB)
180
135
90
45
0
Phase (deg)
10^0
10^1
Frequency (rad/s)

Singoli grafici: zeri e poli reali

$$+n20 \bullet \log_{10} \sqrt{1+(\tau\omega)^2}$$

$$-n20 \bullet \log_{10} \sqrt{1+(\tau\omega)^2}$$

$$\varphi = \pm n \bullet arctg\left(\frac{\tau\omega}{1}\right)$$

- n è la molteplicità del polo o dello zero
- Siccome stiamo tracciando un diagramma asintotico, si osserva una decade prima del polo (zero) e una decade dopo. Il grafico sarà quello di una semiretta con pendenza –(+) n*20dB/decade con origine sull'asse delle ascisse, una decade prima.
- In corrispondenza dello zero o del polo si commette un errore di 3 dB nel tracciare il grafico asintotico.
- Si definisce frequenza di taglio, quella frequenza in cui il grafico taglia l'asse delle ascisse

Singoli grafici: zero semplice e reale

- G(s)=1+0.1s
- Es

$$|G(s)| = 20 \cdot \log_{10} \sqrt{1+(0.1\omega)^2}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{0.1\omega}{1}\right)$$

- ω <= 1, (una decade prima dello zero)

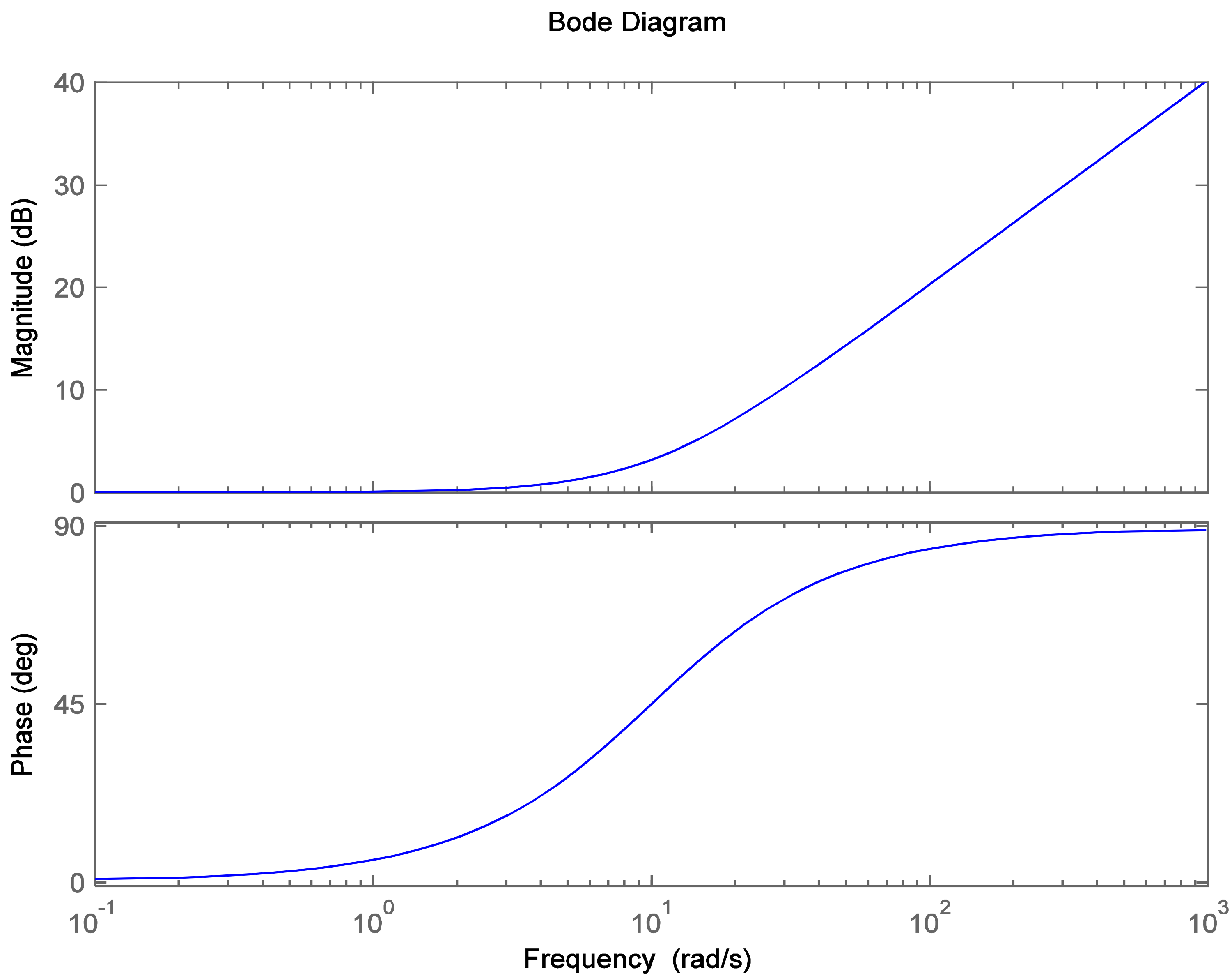
|G(s)|=0 φ=0

- ω =10,

|G(s)|=20*$\log_{10} 2^{1/2}$ φ=45°

- ω >= 100, (una decade dopo lo zero)

|G(s)|=20 dB φ=90°



Bode Diagram
Magnitude (dB)
40
30
20
10
0
Phase (deg)
90
45
0
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)

Singoli grafici: polo semplice e reale

- Es G(s)=1/(1+10s)

$$|G(s)| = -20 \bullet \log_{10} \sqrt{1+(10\omega)^2}$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{10\omega}{1}\right)$$

- ω <= 0.01, (una decade prima del polo)

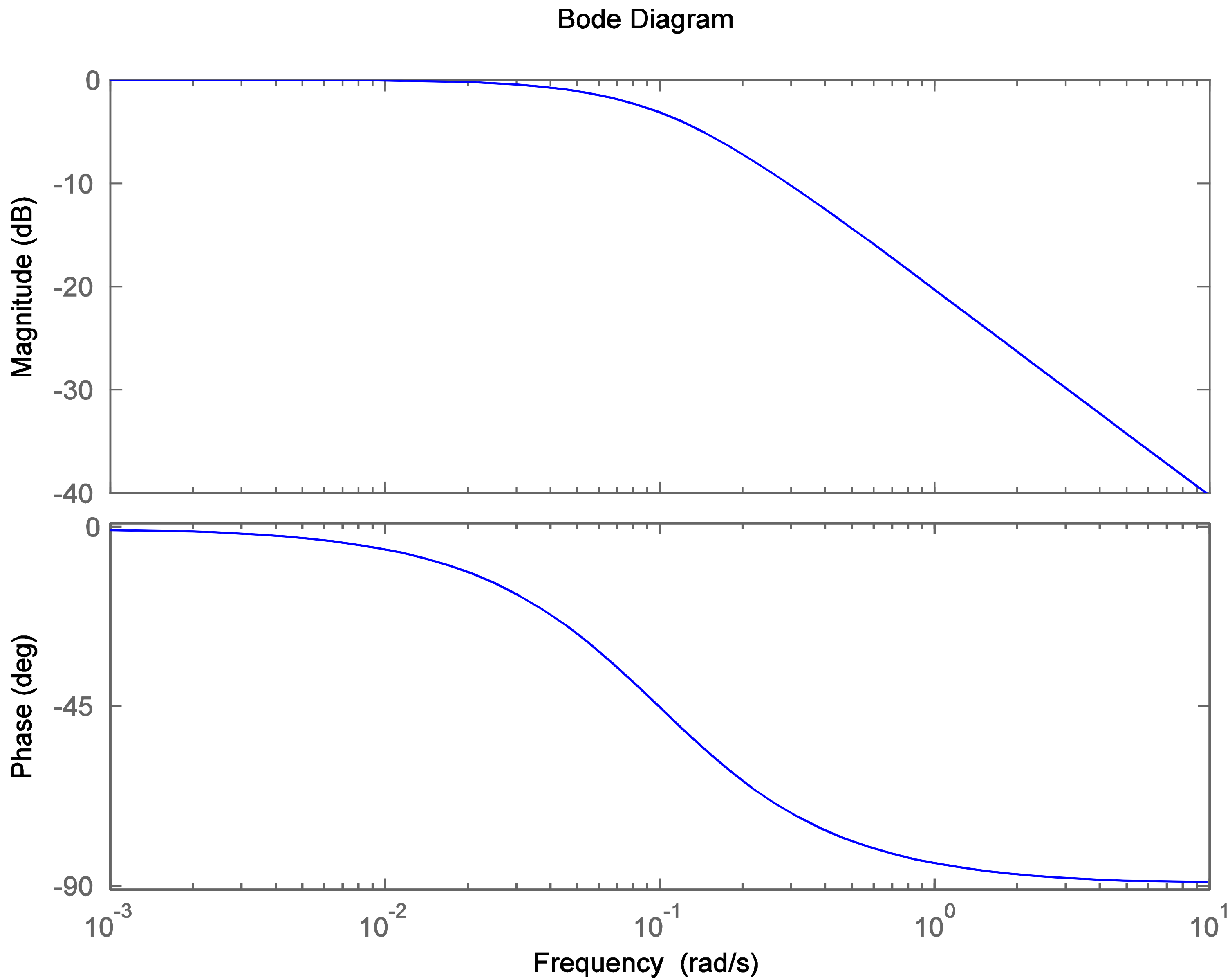
|G(s)|=0 ϕ=0

- ω =0.1,

|G(s)|=-20*$\log_{10}2^{1/2}$ ϕ=–45°

- ω >= 1, (una decade dopo il polo)

|G(s)|=-20 dB ϕ=–90°



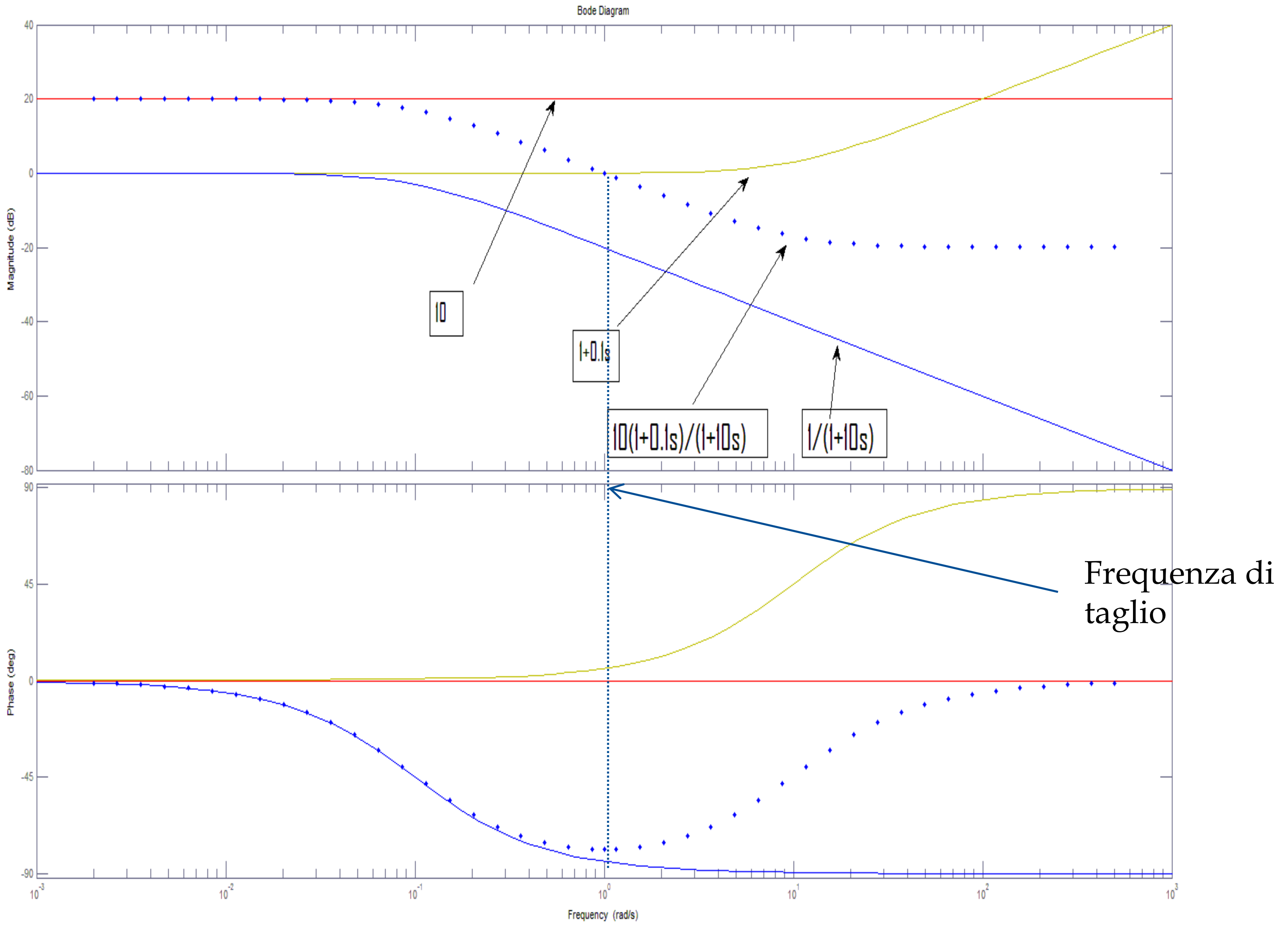
Bode Diagram
Magnitude (dB)
0
-10
-20
-30
-40
Phase (deg)
0
-45
-90
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency (rad/s)

Esempio

- Sia data una f.d.t data dal prodotto delle precedenti

$$G(s) = \frac{10(1+0.1s)}{(1+10\,s)}$$

- I diagrammi di Bode sono dati dalla sovrapposizione degli altri tre



Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
10
1+0.1s
10(1+0.1s)/(1+10s)
1/(1+10s)
Frequenza di taglio

Zeri con molteplicità 2

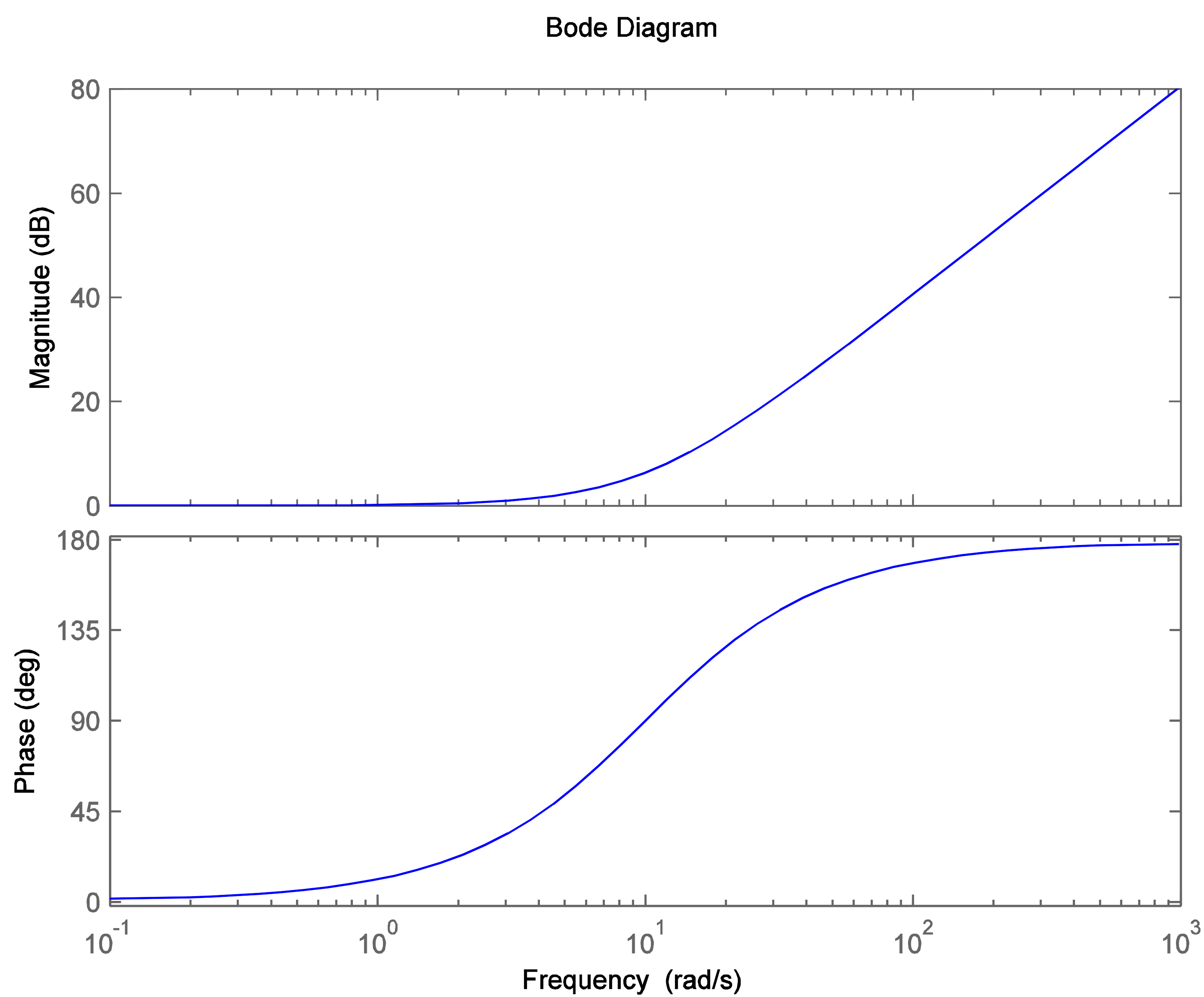
- Es $G(s)=(1+0.1s)^2$

$$|G(s)| = 2 \bullet 20 \bullet \log_{10} \sqrt{1+(0.1\omega)^2}$$

$$\varphi = 2 \bullet arctg\left(\frac{0.1\omega}{1}\right)$$

$\omega <= 1$, (una decade prima dello zero)
$|G(s)|=0$ $\phi=0$
$\omega=10$
$|G(s)|=40*\log_{10}2^{1/2}$ $\phi=90°$

$\omega >= 100$, (una decade dopo lo zero)
$|G(s)|=40$ dB $\phi=180°$


Bode Diagram
Magnitude (dB)
80
60
40
20
0
Phase (deg)
180
135
90
45
0
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)

Poli con molteplicità 2

- Es $G(s)=1/(1+10s)^2$

$$|G(s)| = -2 \bullet 20 \bullet \log_{10}\sqrt{1+(10\omega)^2}$$

$$\varphi = -2 \bullet arctg\left(\frac{10\omega}{1}\right)$$

- ω <=0.0 1, (una decade prima del polo)

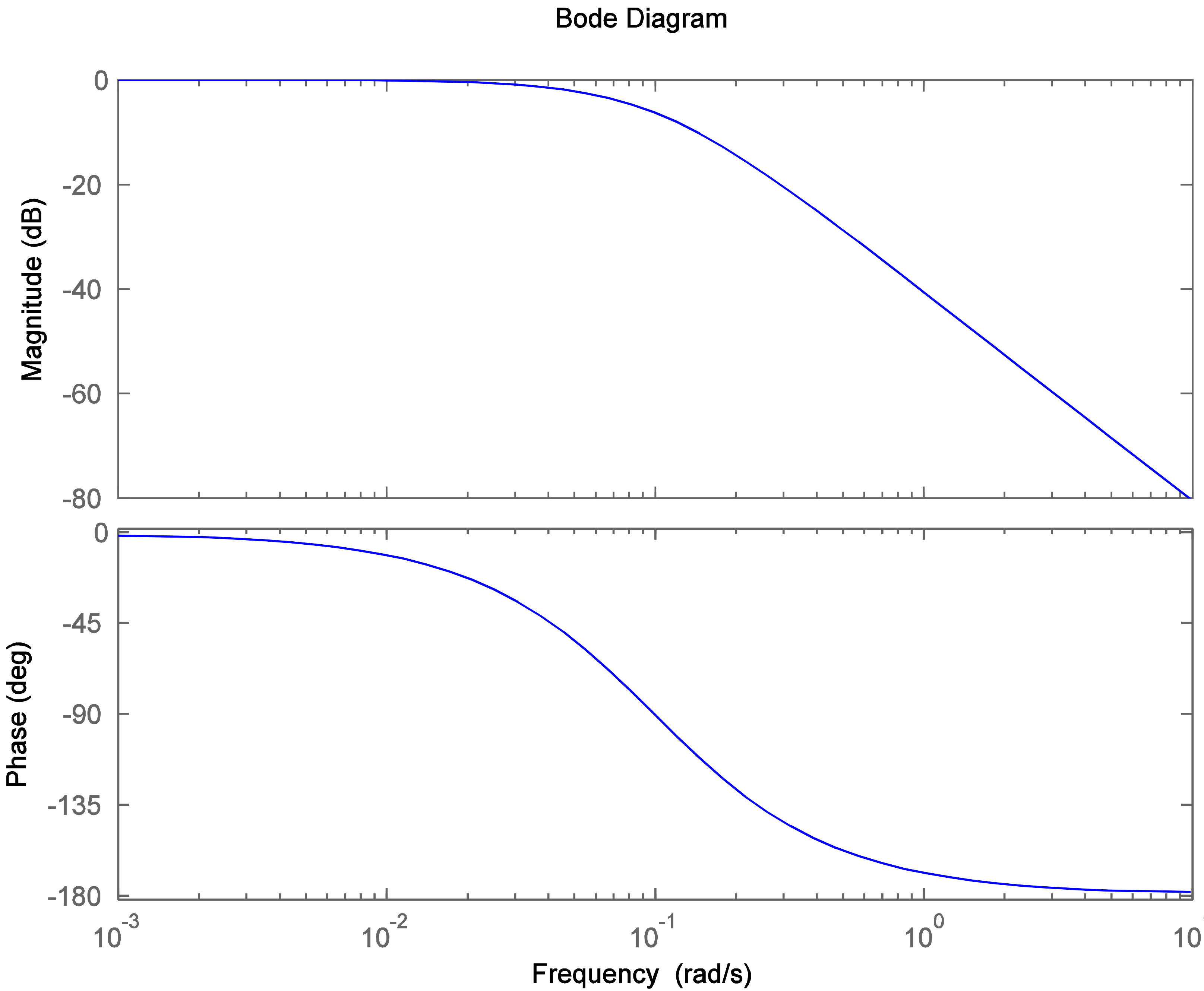
  |G(s)|=0 ϕ=0

- ω =0.0 1,

  |G(s)|=-40*$\log_{10}2^{1/2}$ ϕ=90°

- ω >= 1, (una decade dopo il polo)

  |G(s)|=-2*20 dB ϕ=–180°



Bode Diagram
Magnitude (dB)
0
-20
-40
-60
-80
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
10^-3
10^-2
10^-1
10^0
10^1
Frequency (rad/s)

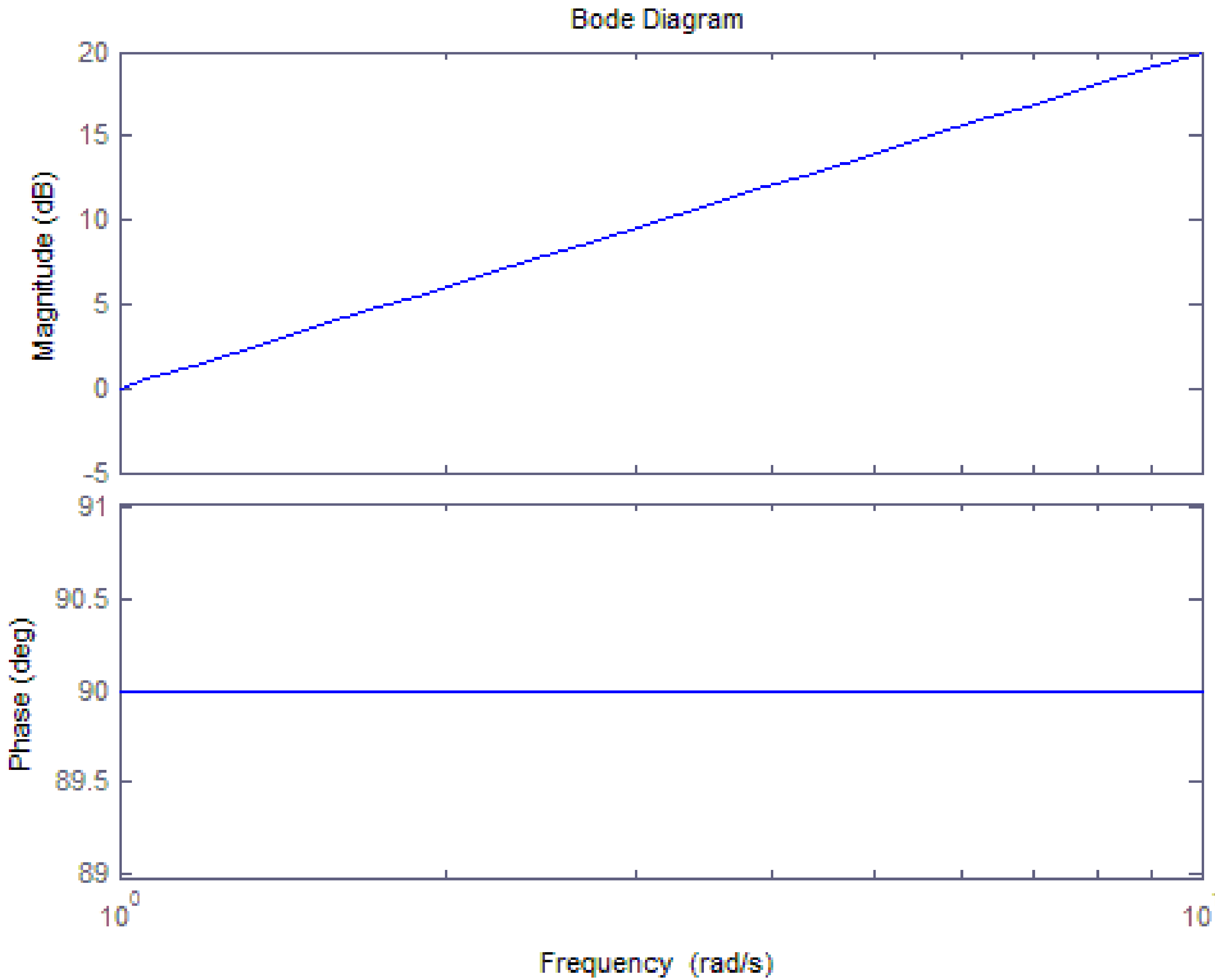
Zeri nell'origine

- $G(s)=s^n$
- $|G(s)|=n*\log_{10} s$
- $\phi=n*\arctg(j\omega/0)=n\ 90°$

Es:

$G(s)=s$

- $|G(s)|=\log_{10} s$
- $\phi=\arctg(j\omega/0)=90°$


Bode Diagram
Magnitude (dB)
20
15
10
5
0
-5
Phase (deg)
91
90.5
90
89.5
89
10^0
10^1
Frequency (rad/s)

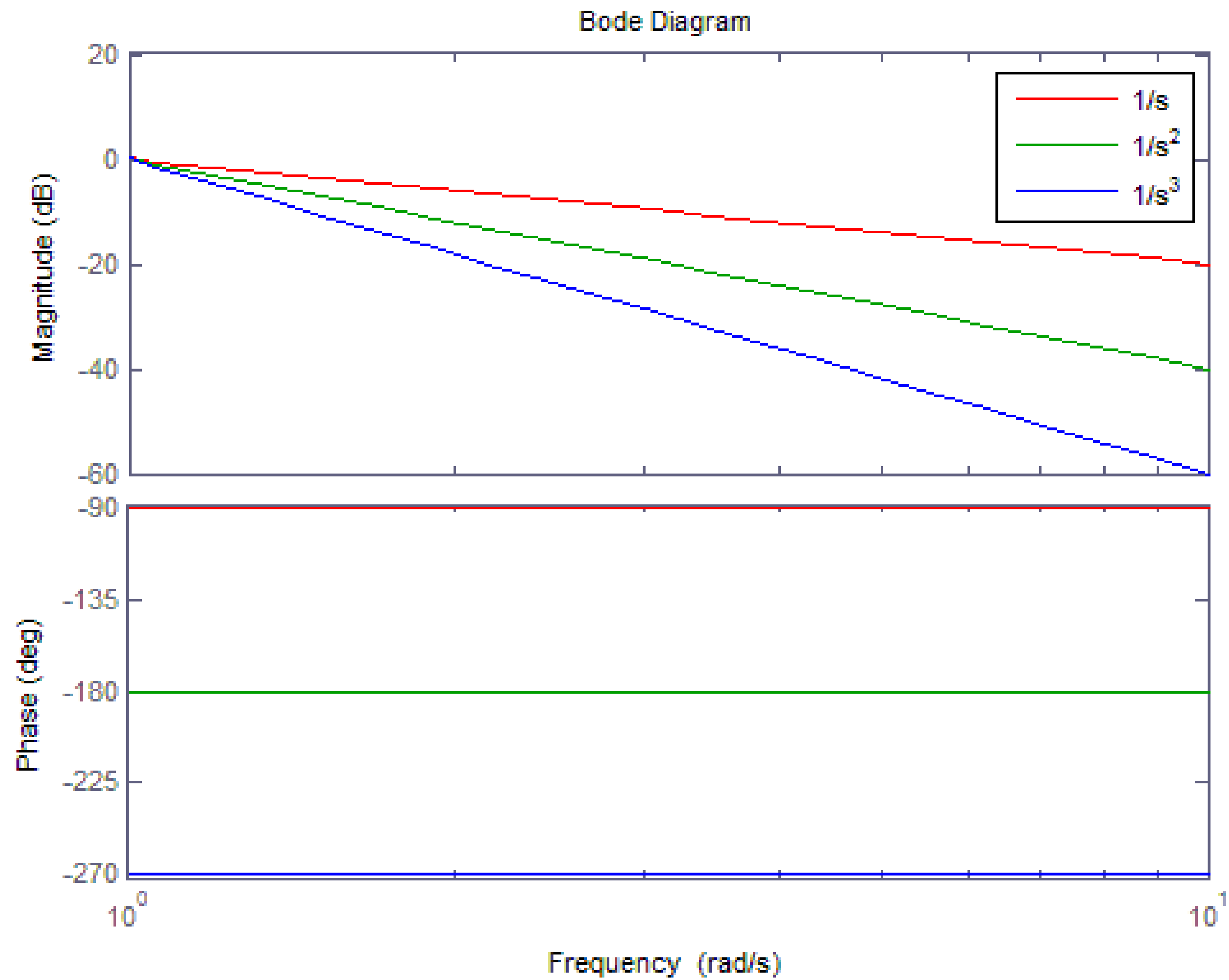
Poli nell'origine

- $G(s)=s^{-n}$
- $|G(s)|=-n*\log_{10} s$
- $\phi=-n*\mathrm{arctg}(j\omega/0)=-n\ 90°$

Es:

$G(s)=1/s$

- $|G(s)|=-\log_{10} s$
- $\phi=-\mathrm{arctg}(j\omega/0)=-90°$

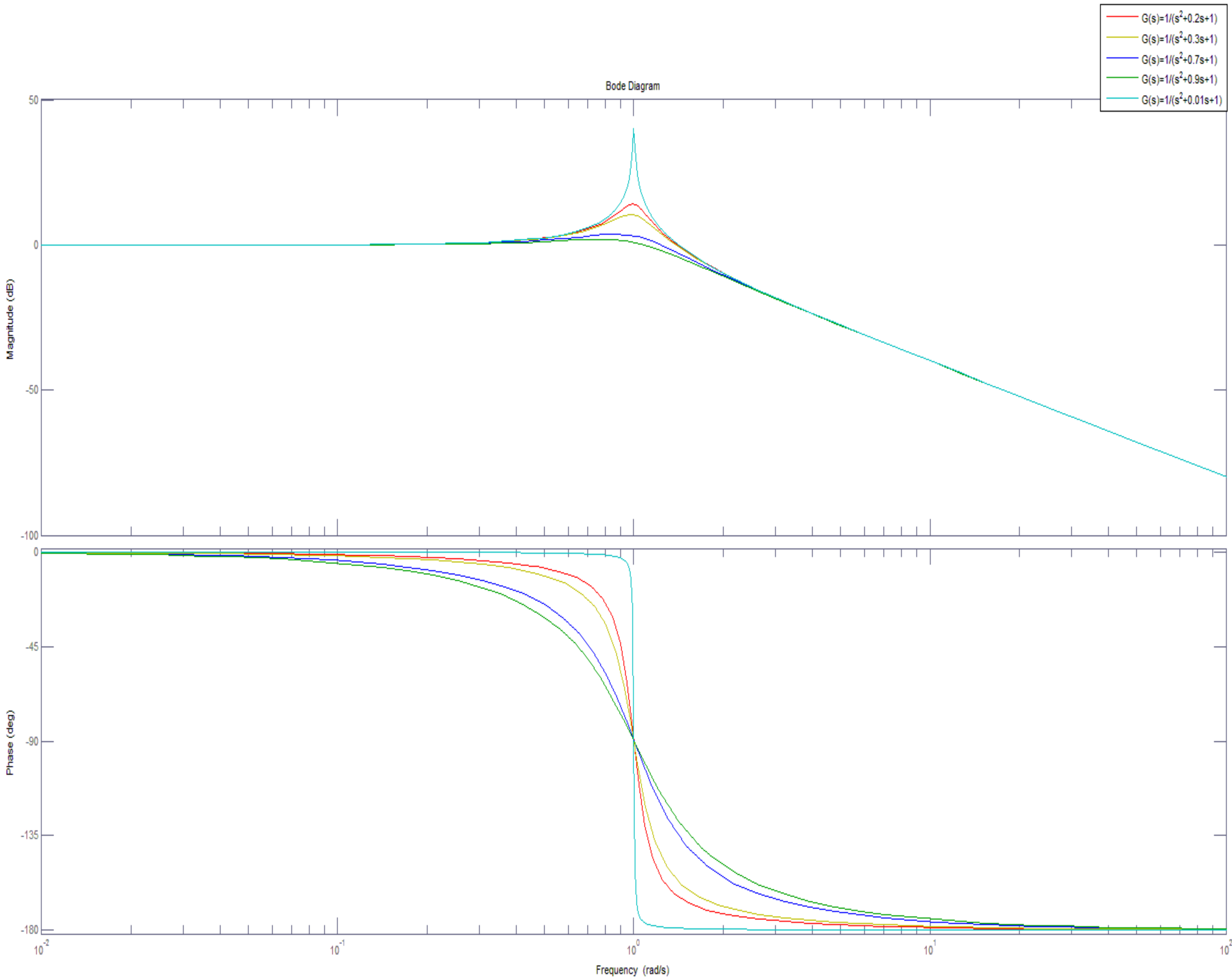

Bode Diagram
Magnitude (dB)
20
0
-20
-40
-60
1/s
$1/s^2$
$1/s^3$
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
10^0
10^1
Frequency (rad/s)

Poli complessi

$$G(s)=\frac{1}{1+2\frac{\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$\omega_{1,2}=\frac{-\frac{\xi}{\omega_n}\pm\sqrt{\left(\frac{\xi}{\omega_n}\right)^2-\frac{4}{\omega_n^2}}}{\frac{1}{\omega_n^2}}$$

$$\omega_{1,2}=\omega_n\left(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-4}\right)$$


Bode Diagram
G(s)=1/(s^2+0.2s+1)
G(s)=1/(s^2+0.3s+1)
G(s)=1/(s^2+0.7s+1)
G(s)=1/(s^2+0.9s+1)
G(s)=1/(s^2+0.01s+1)
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)

Conclusioni

- I vantaggi di una rappresentazione in scala logaritmica sono i seguenti:
  - Alcune funzioni semplici come monomi, binomi, …polinomi assumono una forma particolarmente semplice
  - Possibilità di rappresentare ampie scale di variazione
  - Una funzione più complessa può essere espressa come somma di più funzioni semplici e quindi, ogni grafico di funzioni più complesse, può essere dato dalla sovrapposizione di grafici di semplici funzioni