STABILITÀ

DEFINIZIONE

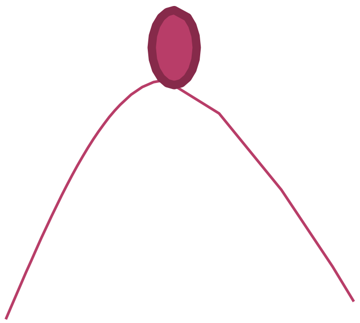
- **un sistema è stabile se, in conseguenza di una sollecitazione esterna limitata, la sua risposta (variazione dell'uscita) è limitata**

(Bounded Input Bounded Output)

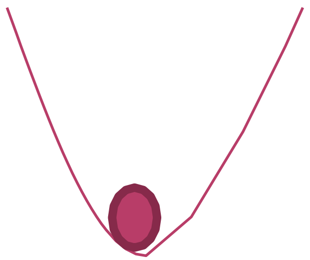
DEFINIZIONE

- Un sistema si dice **asintoticamente stabile** se, sottoposto ad una sollecitazione esterna la risposta converge nel tempo al valore iniziale supposto nullo
- Un sistema si dice **semplicemente stabile** se, sottoposto ad una sollecitazione esterna la risposta converge nel tempo ad un valore diverso da quello iniziale ma finito
- Un sistema si dice **instabile** se,sottoposto ad una sollecitazione esterna l'uscita diverge

ESEMPI



Instabile



Asintoticamente stabile

Semplicemente stabile

COME VALUTARE LA STABILITÀ

La **stabilità** di un sistema può essere verificata **studiando la sua funzione di trasferimento G(s)…**

POLI E STABILITÀ

- La stabilità di un sistema lineare, tempo invariante dipende dalla natura dei poli della funzione di trasferimento
  - Si definiscono poli di una f.d.t., i valori che annullano il denominatore della f.d.t.
- I poli vanno riportati sul piano complesso per poter valutare più facilmente la stabilità del sistema

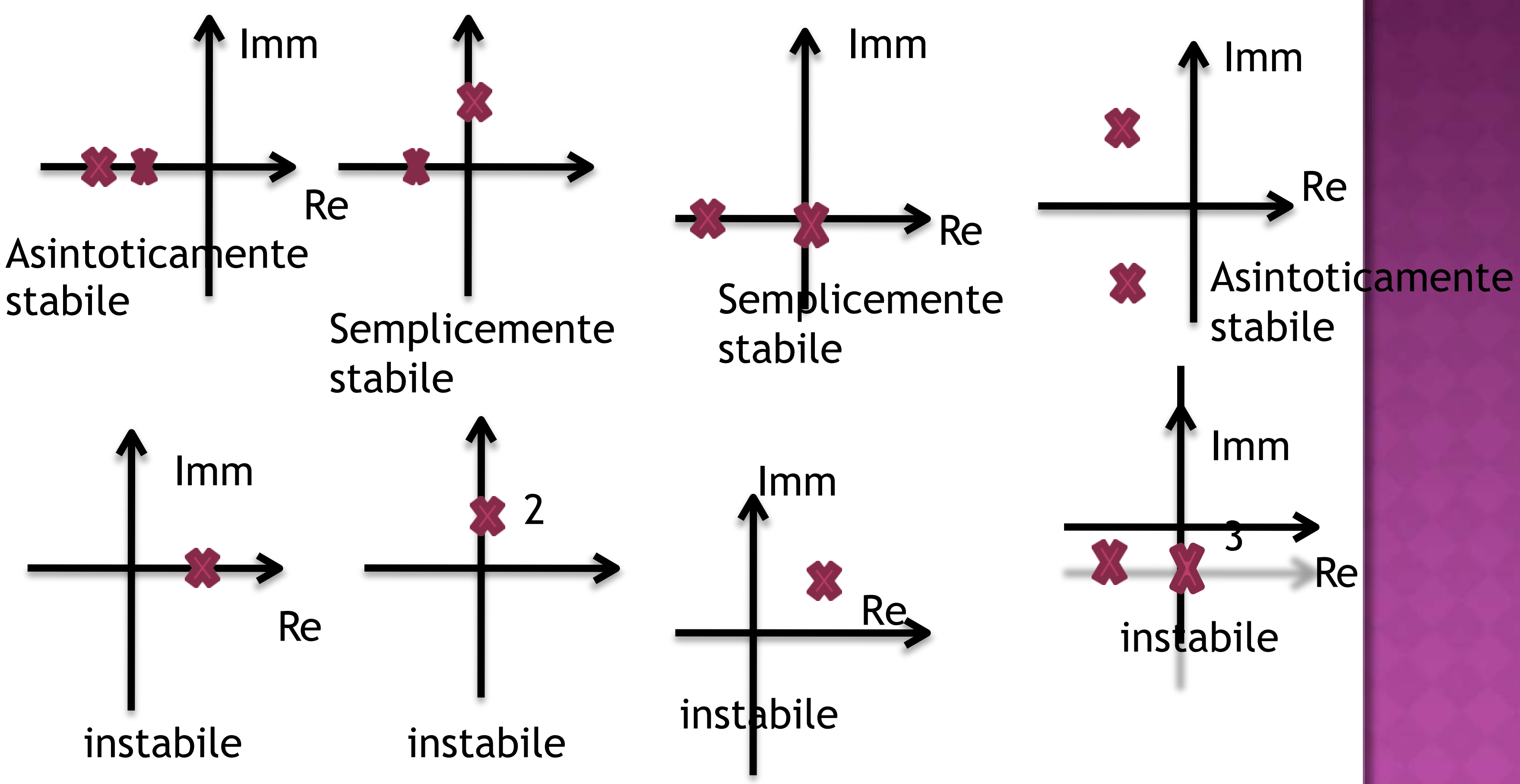
POLI E STABILITÀ

- Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema sia
  - **Semplicemente stabile** è che la f.d.t. non presenti alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli nell'origine, o a parte reale nulla siano semplici
  - **Asintoticamente stabile** è che tutti i poli siano a parte reale negativa

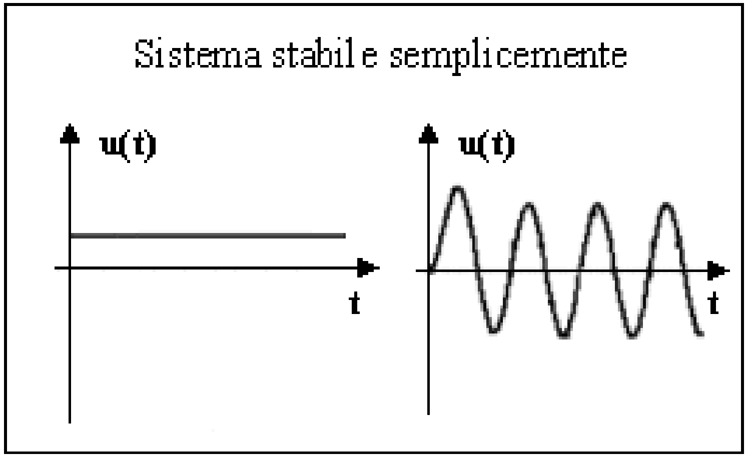
ESEMPI DI POLI DELLE F.D.T

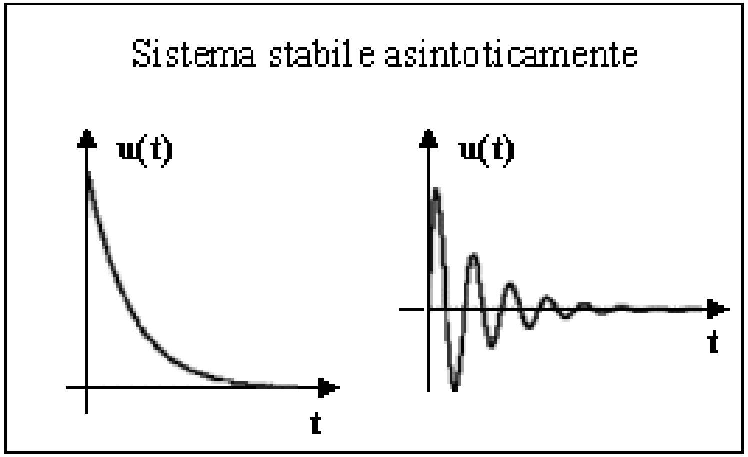
Poli di sistemi instabili	Poli di sistemi asintoticamente stabili	Poli di sistemi semplicemente stabili
P1= 3+j4; p2=-4	P1=-2; p2=-4	P1= 0 molteplicità 1; p2=-3
P1=0 molteplicità 2; P2=-5	P1= -5;	P1=0 molteplicità 1;
P1= -5; p2=6; p3=0 molteplicità 1	P1=-3+4j; p2=-3-4j	P1=0 molteplicità 1; P2=3j molteplicità 1
P1=-4; p2=3j molteplicità 3	P1=-4 P2=-5+7j; P3=-5-7j	P1=4j molteplicità 1; p2=-3

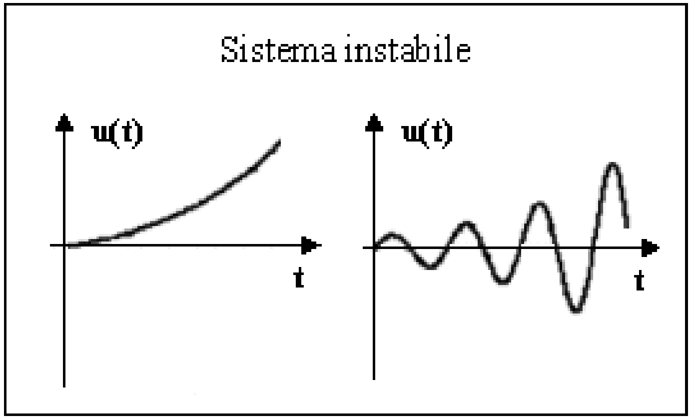
POLI NEL PIANO COMPLESSO



RISPOSTA DI UN SISTEMA AD UN SEGNALE ESTERNO A GRADINO







SISTEMI RETROAZIONATI

- L’analisi di stabilità si applica quasi sempre ai sistemi retroazionati negativamente
- Tutto ciò che è stato detto fino ad ora per la stabilità dei sistemi in generale vale anche per quelli retroazionati negativamente

STABILITÀ DI UN SISTEMA RETROAZIONATO

- L'analisi della stabilità un **sistema retroazionato** potrebbe rivelarsi piuttosto complessa a causa di **lunghi calcoli matematici**
- **La funzione di trasferimento di un sistema retroazionato negativamente è**

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- Il prodotto G(s)H(s) è **la funzione ad anello aperto**

CRITERI DI STABILITÀ

- Esistono criteri di stabilità che semplificano i calcoli

  - Criterio di Routh
  - Criterio di Boode
  - Criterio di Nyquist

CRITERIO DI RUOTH

- Il criterio di Routh è la semplificazione dei teoremi precedenti
  - Analizza i poli della funzione di trasferimento
- Nel caso di un sistema ad anello chiuso analizza gli zeri dell'equazione $1+G(s)H(s)=0$ detta equazione caratteristica
- Come visto,la stabilità di un sistema non dipende dal valore dei poli della funzione di trasferimento ma dalla loro posizione nel piano complesso

CRITERIO DI ROUTH

- Il criterio di Routh ci aiuta solo a conoscere i segni degli zeri di una qualsiasi equazione senza risolverla
- Supponiamo che l'equazione in questione sia:
  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0 \quad = 0$
- Si segue il seguente procedimento

TABELLA DI ROUTH

- Si costruisce la tabella di Routh

s_n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…
s_{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…
s_{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	…	…
s_{n-3}	C_{n-3}	C_{n-5}	…	…	…
…	…	…	…		

- Dove …

COEFFICIENTI DI ROUTH

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-6} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-5} = \frac{b_{n-2}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}$$

CRITERIO DI ROUTH

- **Criterio di Routh: *ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima*** *colonna della tabella di Routh corrisponde una radice a parte reale positiva dell'equazione caratteristica, ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.*

Ossia

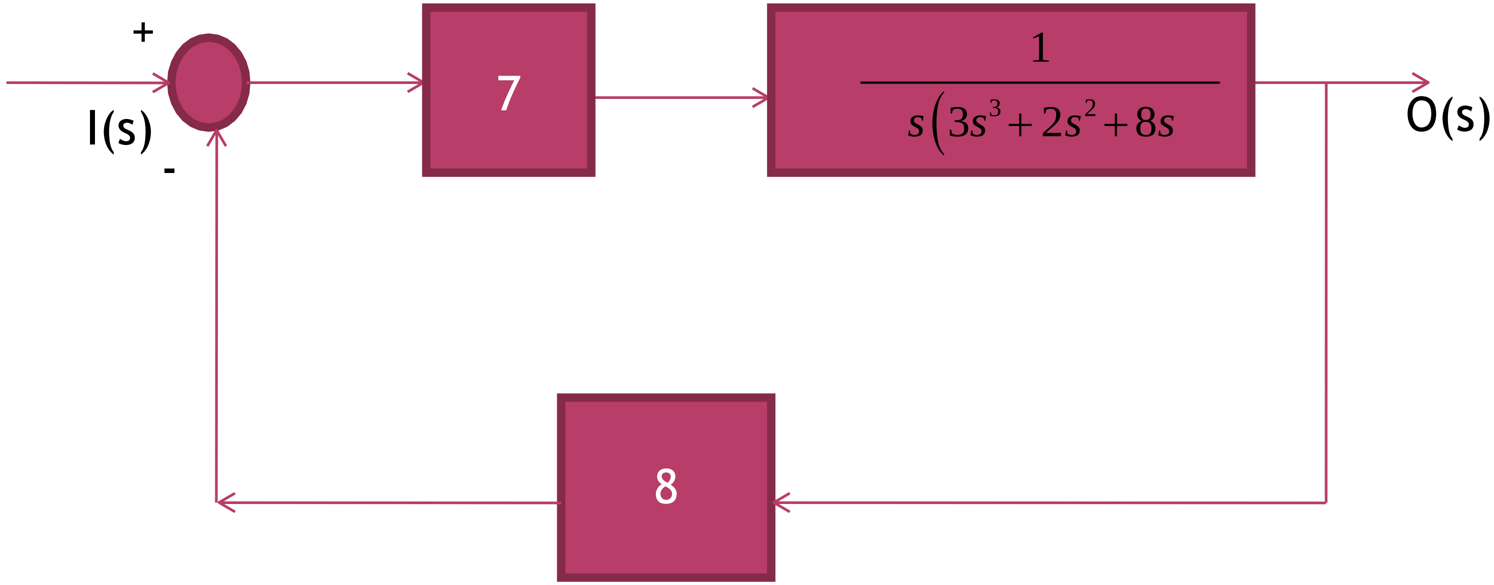
- *Condizione necessaria e sufficiente affinché le radici dell'equazione caratteristica abbiano tutte parte reale negativa è che tutti i termini della prima colonna della tabella di Routh siano di segno concorde.*

- Analogamente si ha: *condizione sufficiente affinché un sistema lineare SISO tempo invariante sia instabile è che tra i termini della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata vi sia almeno uno di segno discorde dagli altri.*

OSSERVAZIONI

- Se la tabella di Routh può essere completata allora:
  - Nessuna radice del polinomio ha parte reale nulla
  - Il numero di radici a parte reale >0 è dato dal numero di variazioni di segno presenti nella prima colonna
  - Ad ogni permanenza di segno corrisponde una radice a parte reale negativa

ESEMPIO



$$W(s)=\frac{7}{3s^4+2s^3+8s^2+s+56}$$

PROCEDIMENTO

- L'equazione caratteristica è la seguente:

$$3s^4 + 2s^3 + 8s^2 + s + 56 = 0$$

La tabella.

3	8	56
2	1	
7.5	56	

- I coefficienti della prima colonna sono positivi $\Rightarrow$ i poli sono a parte reale negativa $\Rightarrow$ il sistema è a.s.

OSSERVAZIONI

- Il criterio di Routh è applicabile anche ai poli di un qualsiasi sistema oltre a quello retroazionato negativamente
- Il lemma di Routh, fornisce solo una condizione necessaria sui segni delle soluzioni: il numero delle soluzioni a parte reale positiva è pari al numero di variazioni *v* di segni tra i coefficienti consecutivi non nulli dell’equazione o è inferiore a *v* per un multiplo intero di 2
  - La regola dei segni di Cartesio fornisce una condizione necessaria e sufficiente per lo studio dei segni delle radici

CRITERI DI BOODE E NYQUIST

- Il più delle volte risulta complicato ricavare l’espressione della equazione caratteristica
- Il criterio di Routh non fornisce il grado di stabilità di un sistema e non permette di progettare un metodo per stabilizzare un sistema instabile
  - Si ricorre ai criteri di Boode e Nyquist

- Si basano entrambe sull’analisi della funzione ad anello aperto

$$G(s)H(s)$$

  - Utilizzano metodi simbolici

CRITERIO DI BOODE

- **Per analizzare la stabilità di un sistema retroazionato negativamente, si studia la funzione di trasferimento G(s)H(s) ad anello aperto.**
- **A tal fine, si definiscono sistemi a sfasamento minimo, quei sistemi in cui G(s)H(s) non presenta poli a parte reale positiva**

→

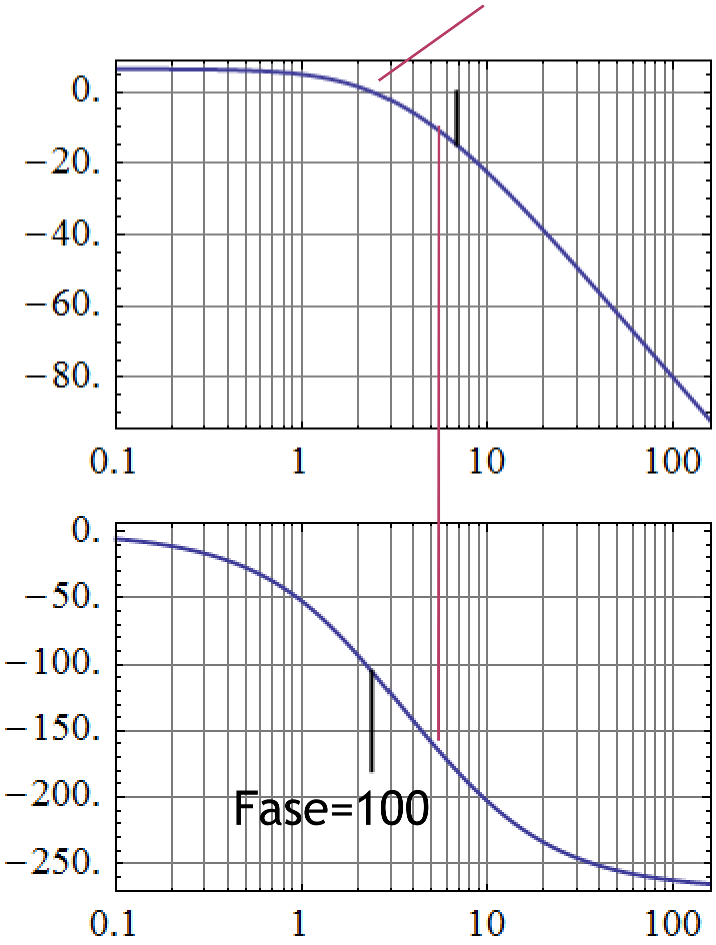
- **Un sistema a catena chiusa e a sfasamento minimo è stabile se lo sfasamento della f.d.t. ad anello aperto calcolato in corrispondenza della pulsazione critica ωt è inferiore in valore assoluto, a 180°**

Dove ωt è detta frequenza di taglio o pulsazione critica ed è tale che

$$|G(j\,\omega t)\,H(j\,\omega t)|_{Db} = 20 \log 1 = 0\ dB$$

ESEMPIO

Gudagno=1



il margine di fase è di 80°

MARGINE DI FASE E MARGINE DI GUADAGNO

- **Margine dì fase**

  Il margine di fase mf è l'angolo ottenuto sottraendo a 180° il valore assoluto |Φωt|della fase della F.d.T. ad anello aperto

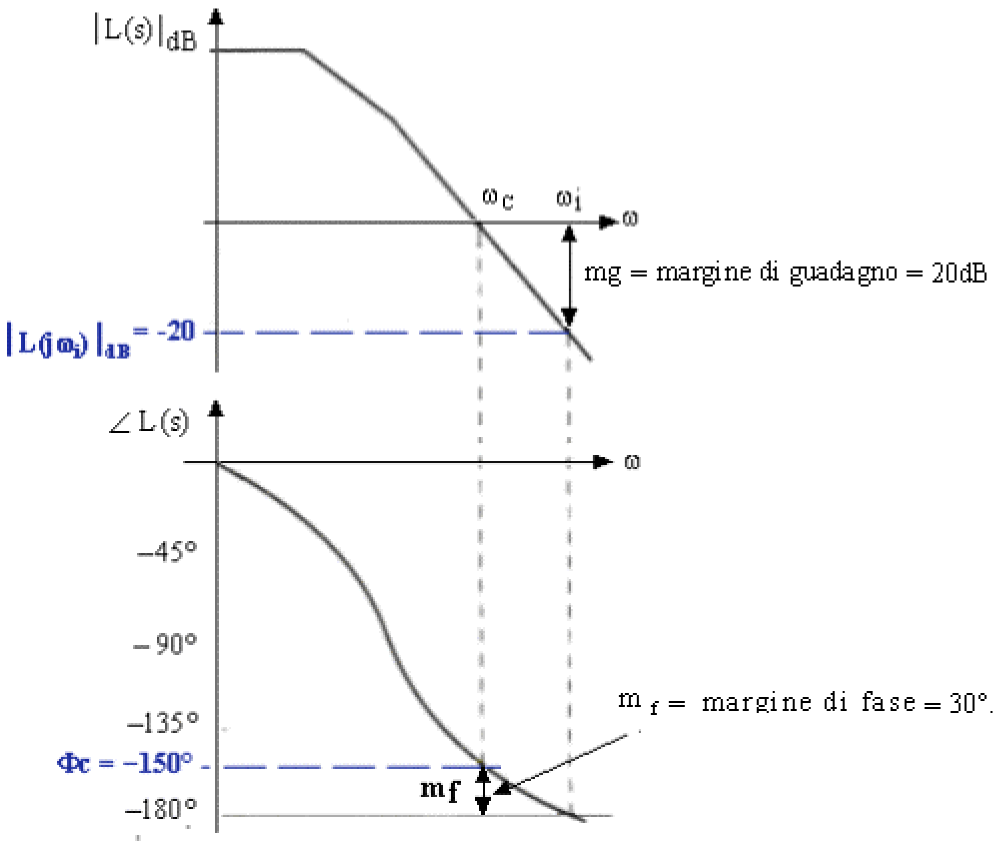
  mf = 180° - |Φωt|

- Un sistema e sufficientemente stabile se il margine di fase è maggiore di 30°, mentre è instabile se il margine di fase è negativo.

- **Margine di guadagno**

  Il margine di guadagno in Db è la differenza tra il modulo in Db della F.d.T. ad anello aperto calcolato in corrispondenza dell'intersezione con l'asse delle ascisse e il modulo della F.d.T. ad anello aperto calcolato quando la sua fase è -180°

MARGINE DI FASE E MARGINE DI GUADAGNO



CRITERIO SEMPLIFICATO DI BOODE

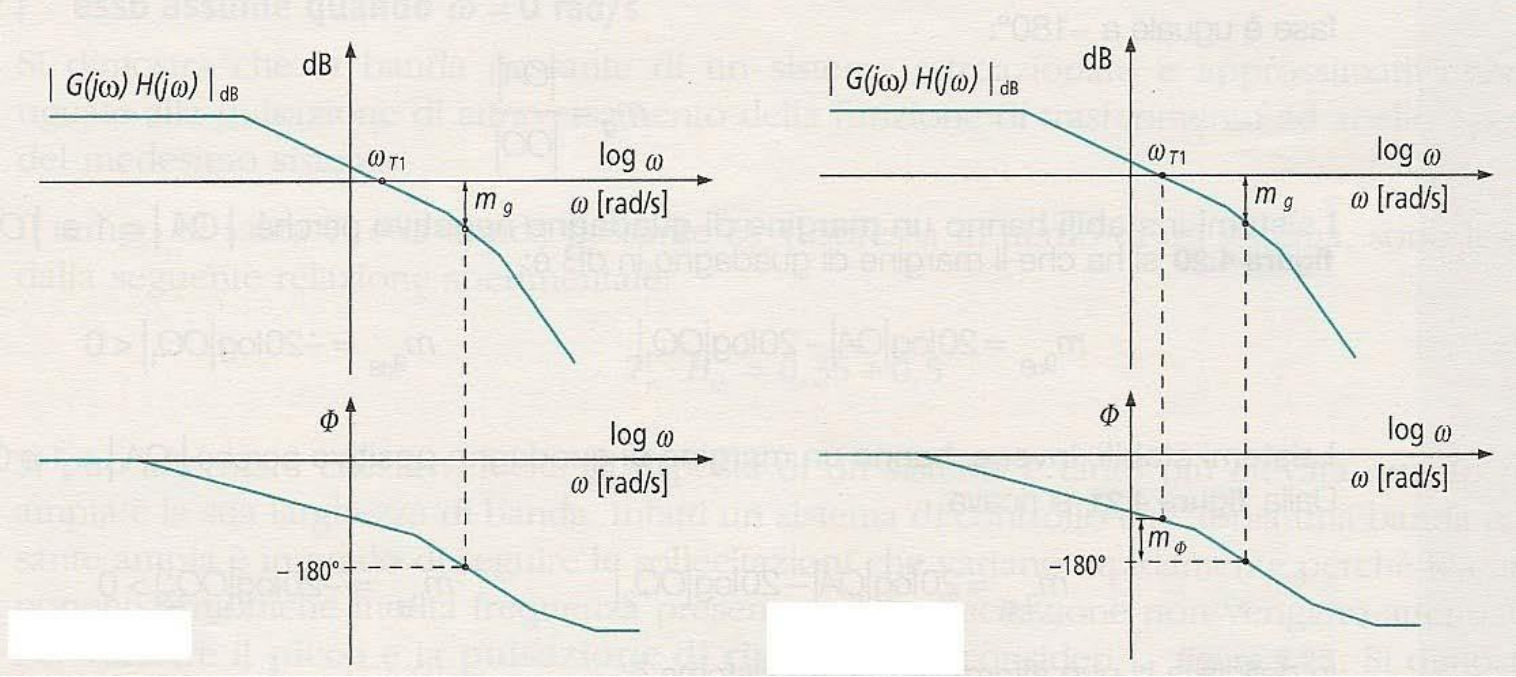
- Un sistema ad anello chiuso è stabile se il diagramma del modulo del guadagno ad anello aperto G(S) *H(S) taglia l'asse delle ascisse con una pendenza massima di 20* dB/dec.
- Se la pendenza è maggiore o uguale a 60 dB/dec il sistema è sicuramente instabile;
- con una pendenza di 40 dB/dec il sistema potrebbe essere instabile e si deve ricorrere al criterio generale di stabilità per avere la sicurezza.

CONFRONTO TRA CRITERIO GENERALIZZATO DI BOODE E CRITERIO SEMPLIFICATO

- Non sempre il criterio semplificato di Boode dà informazioni utili sulla stabilità di un sistema
- Si può fare una prima analisi con il criterio semplificato e poi, successivamente, si può valutare se fare una ulteriore analisi con il criterio generalizzato

- Esempio

ESEMPIO



dB
| G(jω) H(jω) |dB
ωT1
log ω
m g
ω [rad/s]
Φ
log ω
ω [rad/s]
– 180°
dB
| G(jω) H(jω) |dB
ωT1
log ω
m g
ω [rad/s]
Φ
log ω
ω [rad/s]
m Φ
–180°

CRITERIO DI NYQUIST

- Il criterio afferma che un sistema ad anello chiuso è stabile se e solo se il numero di giri (N) in senso antiorario compiuti dal diagramma di Nyquist della f.d.t. ad anello aperto intorno al punto –1 è uguale al numero dei poli (P) a parte reale positiva (cioè non presenta poli nel semipiano destro)

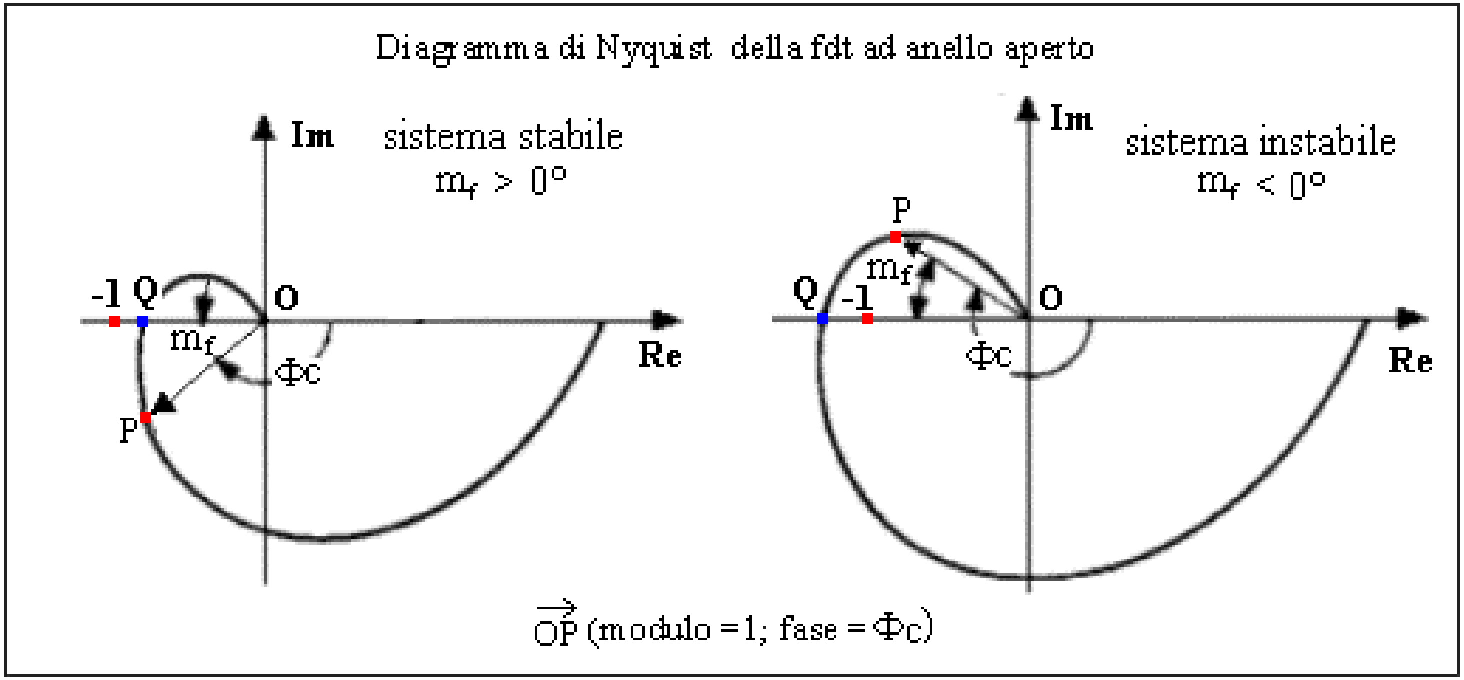
<u>Riassumendo</u>

- $P = N \Rightarrow$ sistema stabile
- $P \neq N \Rightarrow$ sistema instabile

<u>Nota</u>

- Se P=0, cioè la f.d.t. ad anello aperto non presenta poli a parte reale positiva. Il sistema ad anello chiuso è stabile, se il diagramma di Nyquist non compie nessun giro intorno al punto –1 (N=0)

DIAGRAMMA DI NYQUIST



DISCUSSIONE DI UN DIAGRAMMA DI NYQUIST

In pratica:

- $m_f > 30°$ ⇒ sistema sufficientemente stabile
- $m_f < 0°$ ⇒ sistema instabile

- $m_g > 10 \div 20$ dB ⇒ sistema sufficientemente stabile
- $m_g < 0$ dB ⇒ sistema instabile

OSSERVAZIONI

- Il criterio di Boode è più restrittivo perché si basa sui sistemi a sfasamento minimo
- Il criterio di Nyquist è più generico perché è valido anche per sistemi che non sono a sfasamento minimo