Trasformata di Laplace

ESEMPI DI MODELLIZZAZIONE

Introduzione

- La trasformata di Laplace si utilizza nel momento in cui è stata individuata la funzione di trasferimento
- La F.d.T è una equazione differenziale nel tempo abbastanza difficile
- Si ricorre alla trasformata di Laplace per passare dal dominio del tempo al dominio delle frequenze **s**
- Il dominio s non è nel campo reale ma nel campo complesso $s=\alpha+j\omega$

Procedimento

Per conoscere una F.d.t. nel dominio t si procede secondo i seguenti punti:

1. Si trasformano le variabili di ingresso dal dominio t al dominio s
2. Si trasformano le relazioni ingresso-uscita nel dominio s
3. Si determina la funzione di uscita in s
4. Si antitrasforma la funzione di uscita dal dominio s al dominio t

Risposta dei sistemi continui nel dominio del tempo

- La risposta di un sistema nel dominio del tempo a un segnale dipende sia dalla funzione di trasferimento che dal segnale stesso
- In genere, l'analisi di un sistema si fa analizzando la risposta a un gradino unitario come segnale di input

$$u(t) = grad(t) = \begin{cases} 1 \ldots per \ldots t > t_0 \\ 0 \ldots per \ldots t < t_0 \end{cases}$$

- Come si vedrà in seguito

$$grad(t) = \frac{1}{s}$$

Sistema di ordine zero

- È un sistema senza memoria; è rappresentato da una funzione di trasferimento puramente algebrica anche nel dominio del tempo
- È una rete puramente resistiva
- La funzione di trasferimento è una costante

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k$$

$$g(t) = k$$

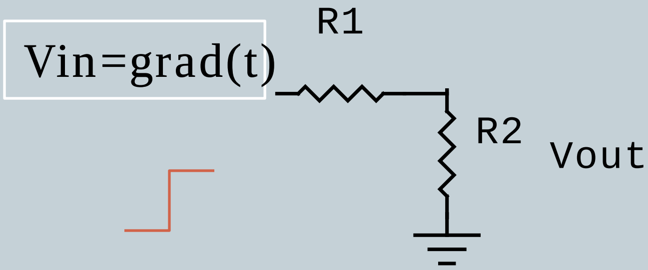
Se il segnale di ingresso è un gradino unitario, la risposta sarà:

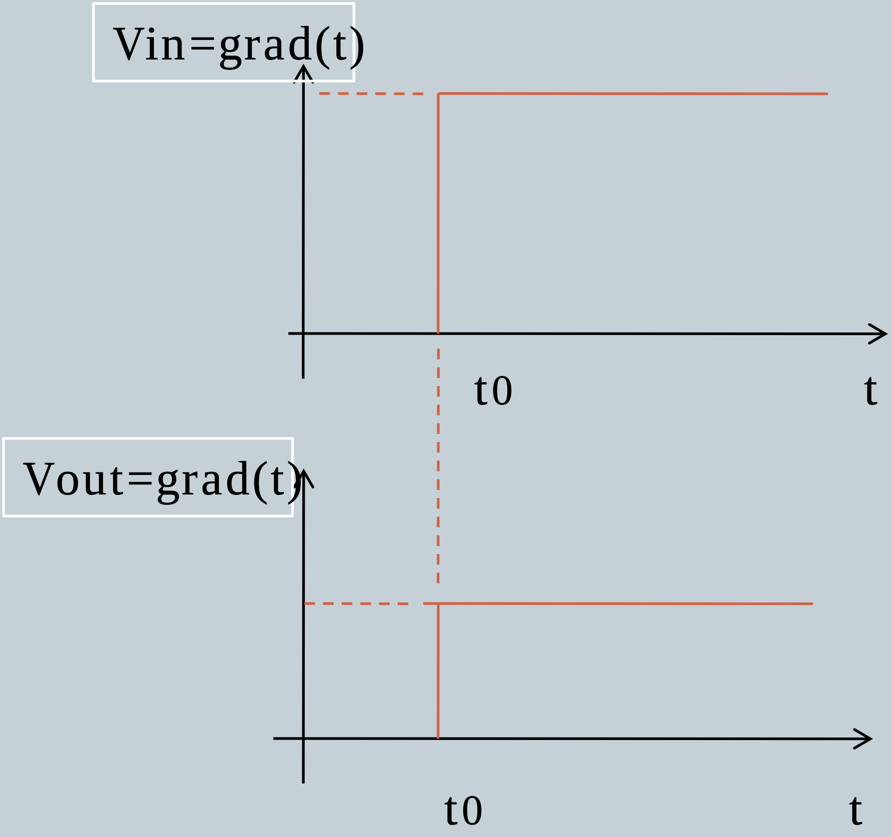
$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{k}{s}$$

- Come esempio si riporta un partitore di tensione

Risposta ad un gradino unitario





$$V_{out} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}$$

Sistema del primo ordine

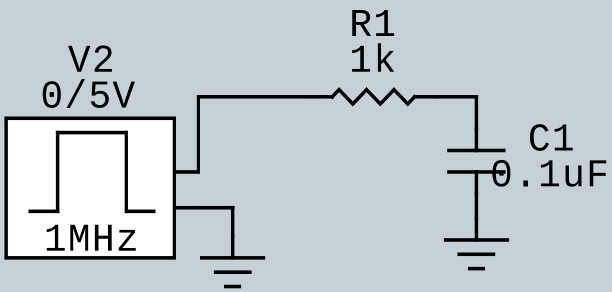
- Il sistema è del primo ordine se in esso è presente un solo componente in grado di immagazzinare energia o materia o informazione
- Nel dominio del tempo, il sistema è descritto da una equazione differenziale del primo ordine
- La funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s+a}$$

- La risposta al gradino unitario $Y(s) = \frac{k}{s(s+a)}$
- Nel dominio del tempo

$$y(t) = \frac{k}{a}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Esempio di un sistema elettrico del primo ordine



$$v_i = v_r + v_c$$

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$Q = CV_c \Rightarrow Ri = RC\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$v_i(t) = RC\frac{\Delta v_c}{\Delta t} + v_c(t)$$

τ=RC costante di tempo

Se si prende l'uscita su C conviene fare queste queste sostituzioni

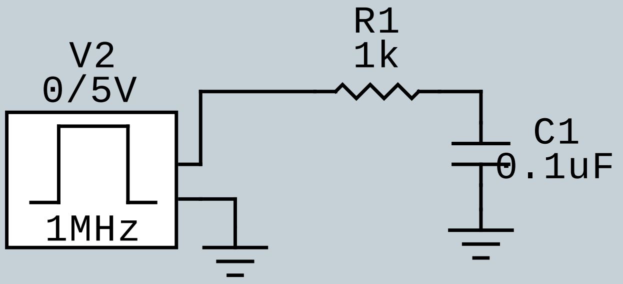
$$L\left(v_i(t) = RC\frac{\Delta v_c}{\Delta t} + v_c(t)\right) = v_i(s) = \tau s v_c(s) + v_s(s)$$

$$v_c(s)(\tau s + 1) = v_i(s) \Rightarrow f.d.t. = \frac{v_o(s)}{v_i(s)} = G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$$

Se l'ingresso è un gradino k/s

$$v_c(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)}$$

Esempio di un sistema del primo ordine



$$v_{out} = Ri$$

$$v_i = Ri + V_c = Ri + \frac{\Delta Q}{C\Delta t} = Ri + \frac{1}{C}\int idt$$

Se si prende l'uscita su R conviene fare queste queste sostituzioni

È complesso calcolare laf.d.t

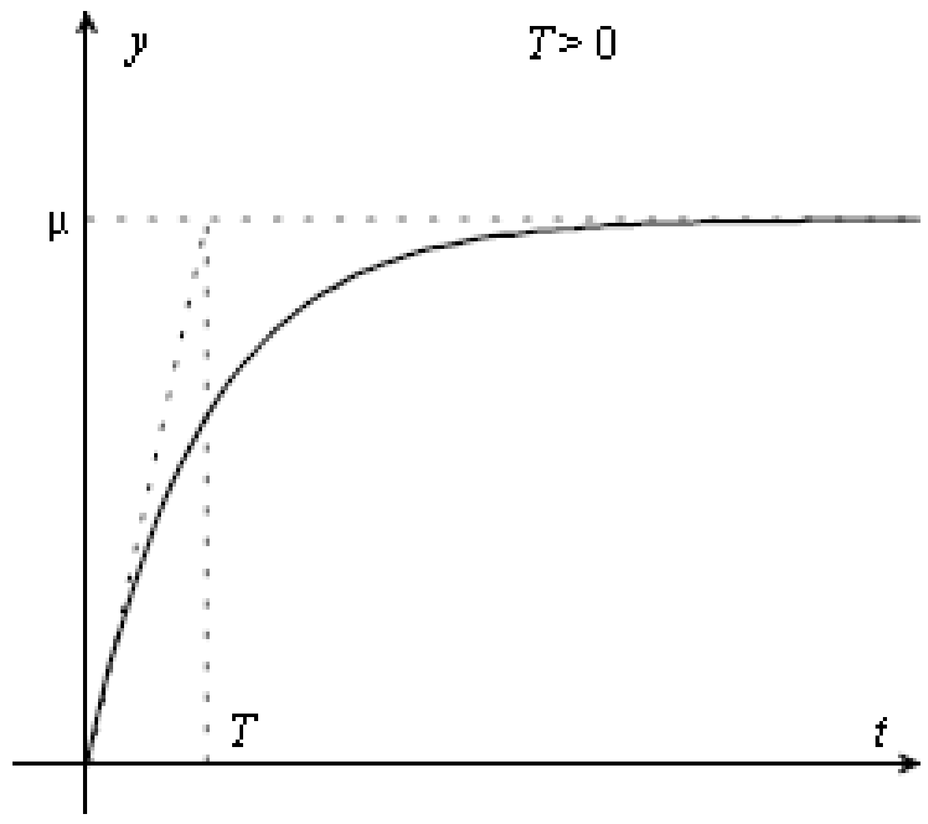
$$v_i(s) = Ri(s) + \frac{1}{sC} i$$

Anche in questo caso si fa la trasformata di Laplace

$$i = \frac{v_{out}}{R} \rightarrow v_i(s) = v_{out} + \frac{1}{sC}\frac{v_{out}}{R}$$

$$\rightarrow \frac{v_{out}}{v_i} = \frac{sC}{1 + sRC}$$

Risposta ad un gradino unitario



Sistemi di secondo ordine

- Si definisce sistema di secondo ordine, quel sistema con due costanti di tempo
- Un esempio molto semplice è un circuito RLC
- Anche in questo caso, si analizza il sistema tramite un ingresso a gradino
- Anche in questo caso si può scrivere:

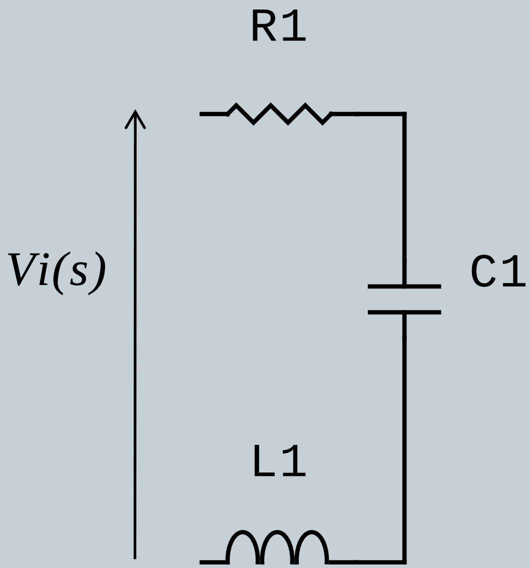
Vi(t)=Vr+Vc+Vl

Si analizza il sistema direttamente nel dominio delle frequenze

$$v_i(s) = v_R + v_L + v_c$$

$$v_i(s) = Ri + sLi + \frac{1}{sC}$$

Sistema del II ordine



Supponiamo di voler prendere l'uscita sul condensatore

$$\frac{V_c}{V_i}=\frac{1/sC}{R+1/sC+sL}=\frac{1}{s^2LC+sRC+1}=$$

$$=\frac{1}{LC\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)}$$

Se si fanno le seguenti posizioni:

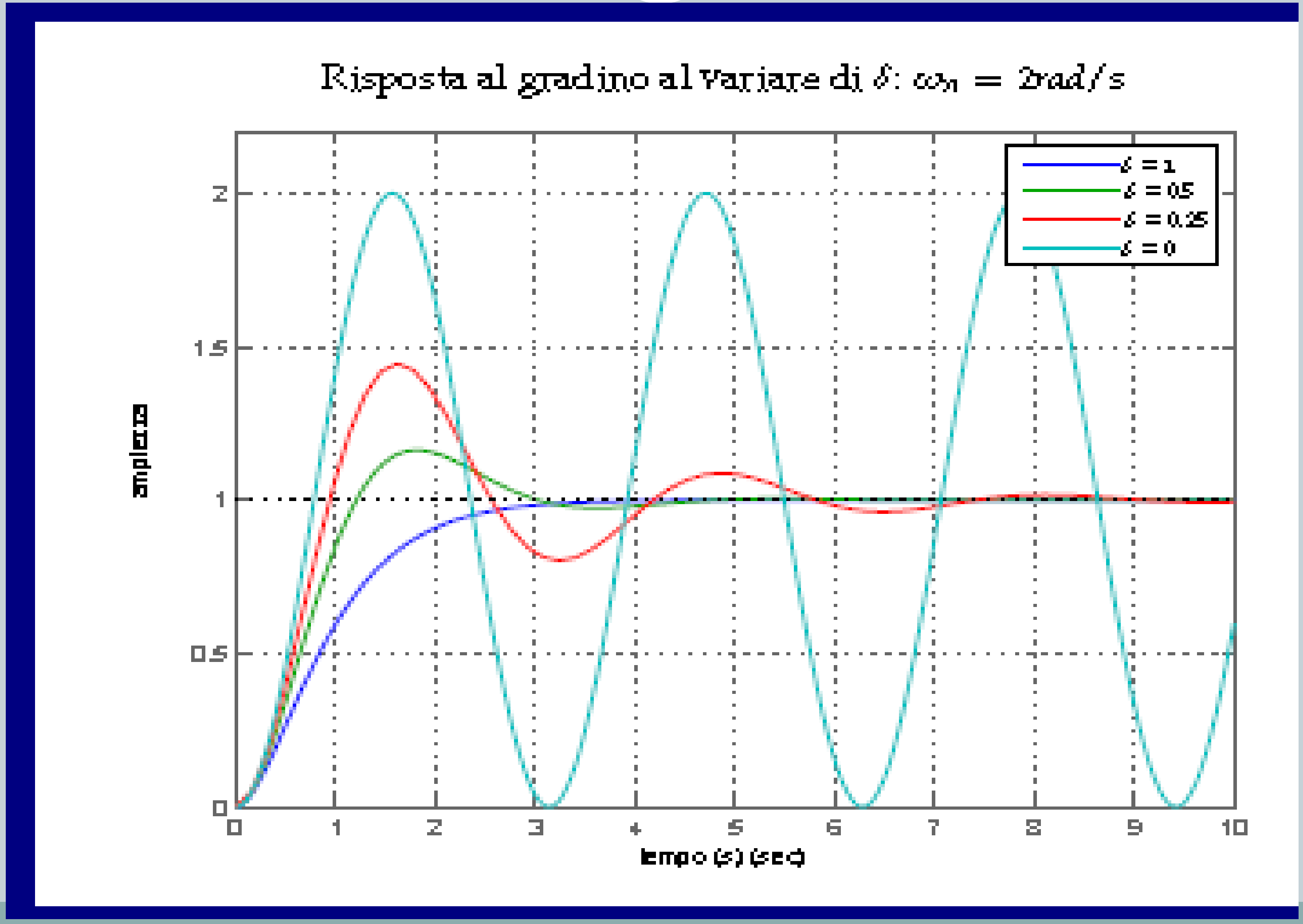
$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$2\zeta\omega_n=\frac{R}{L}$$

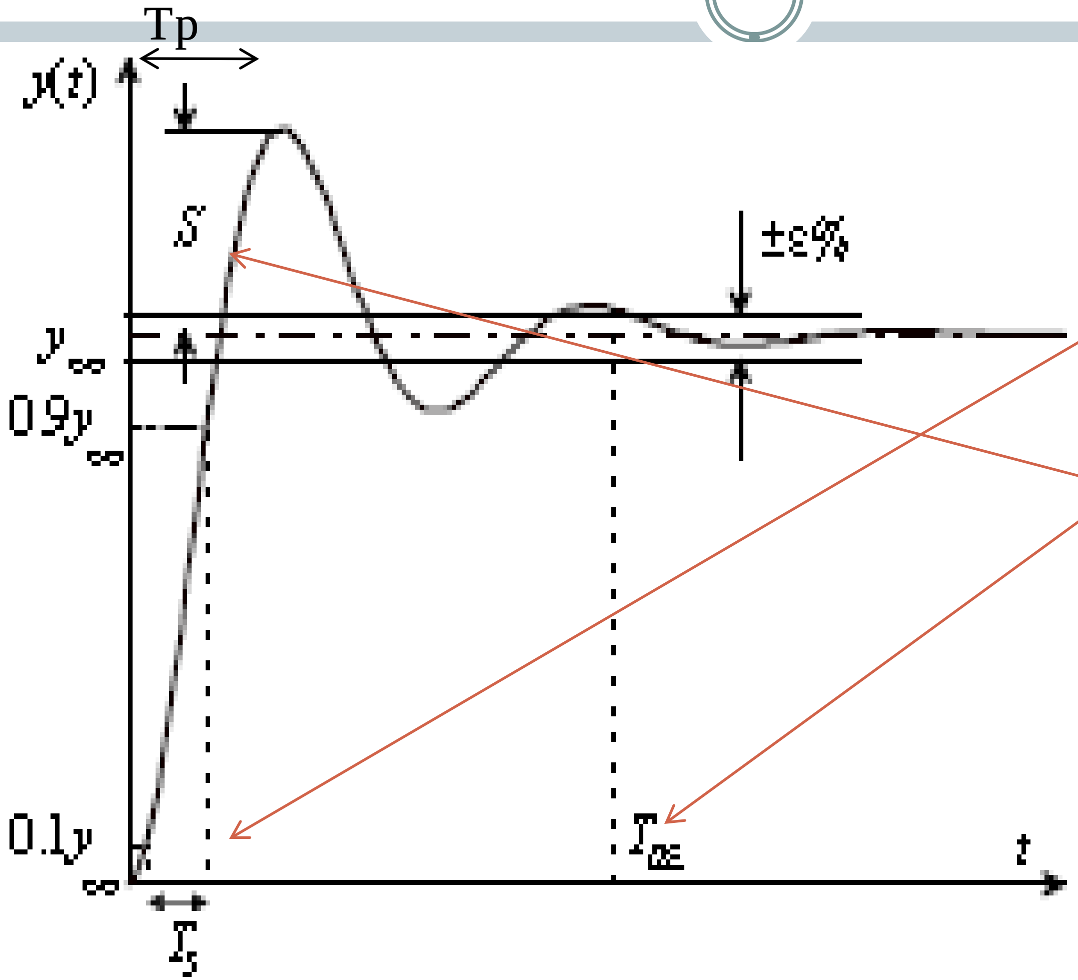
La funzione di trasferimento diventa:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2s\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

Risposta al gradino



Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine



Td = tempo di ritardo
tempo per raggiungere
il 50% del segnale

Ts = tempo di salita
tempo per raggiungere
il 90% del segnale

Ta = tempo di assestamento

S = sovraelongazione
massima

$$S\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

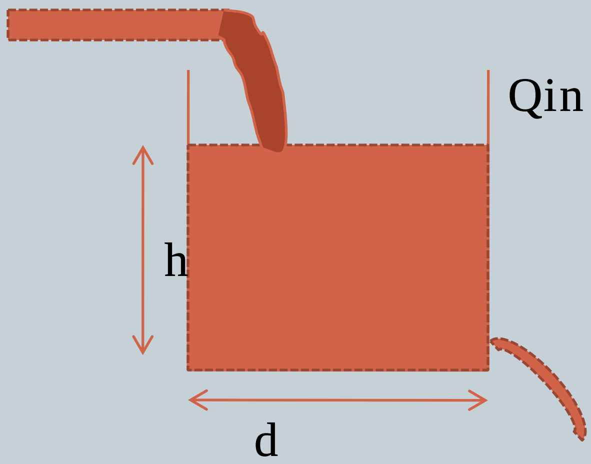
Proprietà e trasformazioni

Dominio nel tempo	Dominio di Laplace
f(t)	F(s)
a f(t)	a F(s)
δ(t) (impulse)	1
a (step)	a/s
at (ramp)	a/s^2
t^n	$s^{n!/(n+1)}$
sin(ωt)	$\omega/(\omega^2+s^2)$
cos(ωt)	$s/(\omega^2+s^2)$
$e^{(-at)}$	1/ (s+a)
$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
sin h (ωt)	$\omega/s^2-\omega^2$
cos h(ωt)	$s/(s^2-\omega^2)$

Teorema del valor finale	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$
Teorema del valore iniziale	$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
Teorema della traslazione	$L\left[f\left(t-T\right)\right] = e^{-Ts}F(s)$

Dominio nel tempo	Dominio di Laplace
d f(t)/d t	s F(s)-f(0)
$d^2(t)/dt^2$	$s^2F(s) - sF(0) - \frac{df(t)}{dt}\Big\|_{t=0}$
$\int_0^t f(t)dt$	F(s)/s
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
F(t-θ)	$e^{-\theta s}F(s)$

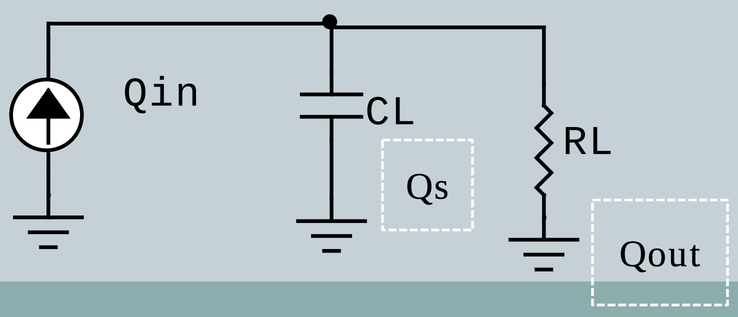
Semplice esempio



Qin portata in ingresso

Qout
Portata in
uscita

Schema equivalente



Qs=Qout-Qin

Semplice esempio

La relazione ingresso-uscita nel dominio del tempo

$$\tau \frac{\Delta h}{\Delta t} + h = \frac{\tau}{A} Q_{in}$$

τ è l costante di tempo, A l’area del serbatoio (vedi file rappresentazione)

Nel dominio delle frequenze

$$\tau s H(s) + H(s) = \frac{Q_{in}\tau}{As}$$

$$H(s) = \frac{Q_{in}}{s} \frac{\frac{\tau}{A}}{1 + s\tau}$$

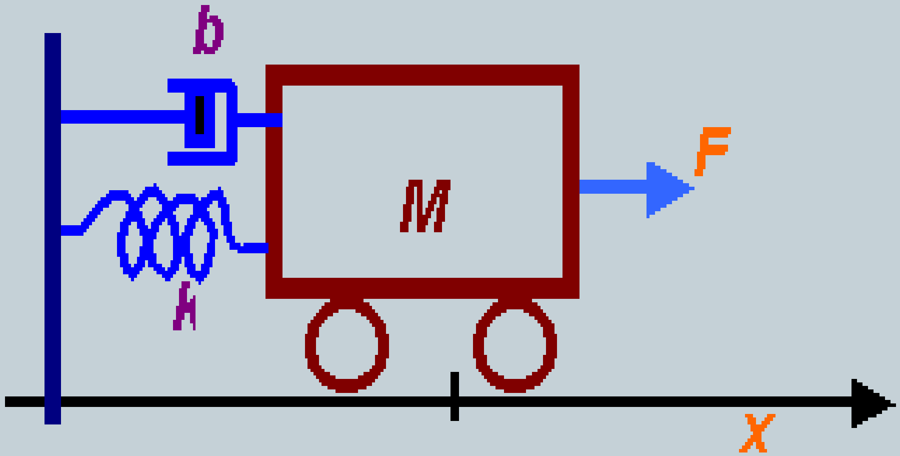
antitrasformata

$$h(t) = \frac{Q_{in}\tau}{A}(1 - e^{\frac{-t}{\tau}})$$

Derivata prima di una variabile

Costante nel tempo

Semplice esempio



Il sistema è prettamente Meccanico. Esso è formato da una massa M, una molla di costante elastica K e uno uno smorzatore di costante b

Se il sistema è sollecitato da una forza F, può essere descritto dalla seguente equazione

$$F - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Se si fa un'analogia con un sistema elettrico allora: F=v, k=1/C, M=L, b=R

In conclusione...

Le componenti circuitali
nel dominio del tempo e
delle frequenze

Dominio del tempo	**Dominio delle frequenze**
R	R
C	1/sC
L	sL

Funzioni di trasferimento di uso più comune

$$1 \Leftrightarrow \delta(t)$$

$$\frac{1}{s} \Leftrightarrow 1$$

$$\frac{k}{s} \Leftrightarrow k$$

$$\frac{1}{s^2} \Leftrightarrow t$$

$$\frac{k}{s^2} \Leftrightarrow kt$$

$$\frac{1}{s+a} \Leftrightarrow e^{-at}$$

$$\frac{k}{s+a} \Leftrightarrow ke^{-at}$$

$$\frac{1}{s(s+a)} \Leftrightarrow \frac{1}{a}(1-e^{at})$$

$$\frac{k}{s(s+a)} \Leftrightarrow \frac{k}{a}(1-e^{at})$$

$$\frac{1}{s(1+\tau s)} \Leftrightarrow \left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\frac{k}{s(1+\tau s)} \Leftrightarrow k\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}(1+\tau s) \Leftrightarrow \frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left[\left(1-\frac{\tau}{\tau_1}\right)e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \left(1-\frac{\tau}{\tau_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$$